考試科目	數理統計	所別	統計所	考試時間	6月24日 星期 上午第 一 節

(20%) 1. Let X_1, X_2, X_3 be independent with X_i having density $f(x_i) = \exp(-x_i)$, $x_i > 0$. Let $U_1 = X_1 + X_2 + X_3$, $U_2 = X_2/X_1$, and $U_3 = X_3/U_1$.

(a) Find the joint density of (U_1, U_2, U_3).

(b) Discuss the independency of U_1, U_2, and U_3.

(20%) 2. Suppose that $X_i \sim N(i\theta, \tau^2)$ are independent, $i = 1, 2, \cdots, n$. Let $U = \sum_{i=1}^{n} iX_i/k$, where $k = \sum_{i=1}^{n} i^2$, and $V^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - iU)^2/(n-1)$.

(a) Show that $U \sim N(\theta, \tau^2/k)$

(b) Show that $(n-1)V^2/\tau^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

(c) Show that U and V^2 are independent.

(20%) 3. Suppose that a sample of size n is drawn from the uniform distribution

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

(a) Show that $X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ is a biased estimator for θ.

(b) Find a constant c, so that $cX_{(n)}$ would be an unbiased estimator for θ.

(30%) 4. Let $X_1, \cdots, X_n$ be independent, with $X_i \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, where α and β are both unknown. (i.e the p.d.f. of X_i is $f(x_i) = \dfrac{x_i^{\alpha-1}\exp(-x_i/\beta)}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}$, $x_i > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$).

(a) Find the best unbiased estimator of $\alpha\beta$.

(b) Find the best unbiased estimator of $\alpha^n\beta^n$.

備考	試題隨卷繳交

考試科目	線性模式	所別	統計系	考試時間	6月24日 星期二 上午第 節

考慮線性模式 $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = Y = X\beta + \epsilon$，其中 X 是秩 (rank) 為 p 的 $n\times p$ 矩陣，$\mathcal{E}[\epsilon]=0$，$\mathcal{D}[\epsilon]=\sigma^2 I_n$。令 $\hat{\beta}$ 表示 β 的 LSE，$\hat{Y} = X\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_1 \\ \vdots \\ \hat{Y}_n \end{pmatrix}$，$e = Y-\hat{Y}$.

(1) (i) 求 $\mathcal{D}[e]$ (5%)　(ii) 証明：$\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i (Y_i - \hat{Y}_i) = 0$ (5%)

(iii) 証明：$E(\|e\|^2) = (n-p)\sigma^2$，其中 $\|e\|^2 = e'e$. (15%)
(敘述出所要引用的定理)

接著，設 A 是已知的 $g\times p$ 矩陣，且 A 的秩為 p，c 是已知的 $g\times 1$ 向量。

(2) (i) 在 $A\beta = c$ 的限制下，推導出 β 的 LSE $\hat{\beta}_H$. (20%)

(ii) 証明 $Var(\hat{\beta}_{H_i}) \le Var(\hat{\beta}_i)$，其中 $\hat{\beta}_{H_i}$ 和 $\hat{\beta}_i$ 分別是 $\hat{\beta}_H$ 與 $\hat{\beta}$ 的第 i 個分量. (15%)

(iii) 令 $RSS = \|Y - X\hat{\beta}\|^2$，$RSS_H = \|Y - X\hat{\beta}_H\|^2$

証明：$RSS_H - RSS = (A\hat{\beta}-c)'[A(X'X)^{-1}A']^{-1}(A\hat{\beta}-c)$ (15%)

現進一步設 $\epsilon \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$.

(3) 証明：在假設 $H: A\beta = c$ 成立時，

$$\frac{(RSS_H - RSS)/g}{RSS/(n-p)} \sim F_{g,n-p}. \quad (25\%)$$

(敘述出所要引用的定理)