考試科目	數理統計	所別	統計所	考試時間	6月23日 星期二 上午第一節

1. Suppose $X_1, X_2, \ldots$ are i.i.d. r.v.'s from $B(1,p)$. (20%)

   (a) Show that there does not exist an unbiased estimator of p^{-1}, given a fixed sample, say, $X_1, \ldots, X_n$.

   (b) Let N be the first n such that $X_n = 1$. Show that $E(N) = p^{-1}$.

2. Let $\{X_n\}, n = 1, 2, \ldots$ be a sequence of random variables and X be a random variable. (20%)

   (a) Define *converges in probability* ($X_n \xrightarrow{P} X$), *converges in distribution* ($X_n \xrightarrow{d} X$), and *converges in quadratic mean* ($X_n \xrightarrow{q.m.} X$).

   (b) Show that $X_n \xrightarrow{P} X$ implies $X_n \xrightarrow{d} X$, and $X_n \xrightarrow{q.m.} X$ implies $X_n \xrightarrow{d} X$.

   (c) Find counter examples that neither *converges in probability* implies *converges in quadratic mean*, nor *converges in quadratic mean* implies *converges in probability*.

3. Let X be a r.v. having the geometric distribution; that is, (20%)

$$f(x;\theta) = \theta(1-\theta)^x, \quad x = 0, 1, \ldots, \quad \theta \in \Theta = (0,1),$$

   and let $U(X)$ be defined as follows: $U(X) = 1$ if $X = 0$ and $U(X) = 0$ if $X \neq 0$. Show that $U(X)$ is a UMVU estimator of θ and conclude that it is an unreasonable one.

4. Let $X_1, \ldots, X_n$ be independent r.v.'s with p.d.f. given by (20%)

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} I_{(0,\infty)}, \quad \theta \in \Theta = (0,\infty).$$

   (a) Derive the UMP test for testing the hypothesis $H_0 : \theta \geq \theta_0$ against the alternative $H_1 : \theta < \theta_0$ at the level of significance α.

   (b) Determine the minimum sample size n required to obtain power at least 0.95 against the alternative $\theta_1 = 500$ when $\theta_0 = 1,000$ and $\alpha = 0.05$.

5. Let $X_1, \ldots, X_n$ be i.i.d. r.v.'s from $U(0,\theta)$ and set $R = X_{(n)} - X_{(1)}$, where (20%)

$$X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i \quad \text{and} \quad X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

   (a) Find the distribution of R.

   (b) Show that a confidence interval of θ, based on R, with confidence coefficient $1-\alpha$ is of the form $[R, R/c]$, where c is a root of the equation

$$c^{n-1}[n-(n-1)c] = \alpha.$$

考試科目	線性模式	所別	統計	考試時間	6月23日 星期二 上午第二節

以線性模式 $y=\beta_0+\beta_1 x_1+\cdots+\beta_{p-1}x_{p-1}+\epsilon$ 配適 n 個資料點 $\{(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{i,p-1};y_i)\mid i=1,2,\cdots,n\}$，即資料點滿足 $y_i=\beta_0+\beta_1 x_{i1}+\cdots+\beta_{p-1}x_{i,p-1}+\epsilon_i$，$i=1,2,\cdots,n$，或

$$y=X\beta+\epsilon \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

其中

$$y=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1,p-1}\\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2,p-1}\\ & & \vdots & \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{n,p-1}\end{pmatrix},\quad \epsilon=\begin{pmatrix}\epsilon_1\\ \vdots\\ \epsilon_n\end{pmatrix},$$

$n>p$，$\text{rank}(X)=p$，且 $E(\epsilon)=0$，$Cov(\epsilon)=\sigma^2 I_n$。

10% 一、令 e_i 表示第 i 個殘差值，$i=1,2,\cdots,n$，証明 $\sum_{i=1}^{n} e_i=0$。

10% 二、令 $SS_E=e'e$，其中 $e'=(e_1,\cdots,e_n)$，証明 $E(SS_E)=(n-p)\sigma^2$，並敘述你所引用的定理。

10% 三、定義 $R^2=1-\dfrac{SS_E}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$，証明 $y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ 和 $\hat{y}=\begin{pmatrix}\hat{y}_1\\ \vdots\\ \hat{y}_n\end{pmatrix}=Hy$ 的相關係數之平方等於 R^2，其中 $H=X(X'X)^{-1}X'$。

10% 四、令 $H=(h_{ij})$，証明 $\forall\ 1\le i\le n$，$0\le h_{ii}\le 1$，且 $\sum_{i=1}^{n} h_{ii}=p$。

五、設 $A: g\times p$ 是秩(rank)為 g 的已知矩陣，$c: g\times 1$ 是已知向量。(i) 在 $A\beta=c$ 的限制下，証明 β 的 LSE

$$\tilde{\beta}=\hat{\beta}+(X'X)^{-1}A'\left[A(X'X)^{-1}A'\right]^{-1}(c-A\hat{\beta})$$

10% 其中 $\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$。

考試科目	線性模式	所別	統計	考試時間	6月23日 星期二 上午第二節

10% (ii) 在有限制條件下與沒有限制條件下的殘差平方和，那一個較大？詳細証明你的理由。

10% (iii) 設 $\epsilon \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$. 詳細敘述在檢定假設 $H: \Lambda\beta = c$ 時，所要用到的統計量。

六. 現在考慮增加一些迴歸自變數，即將模式(1)擴大如下：

$$y = X\beta + Z\gamma + \epsilon \quad \cdots\cdots \quad (2)$$
$$= (X, Z)\begin{pmatrix}\beta \\ \gamma\end{pmatrix} + \epsilon$$
$$= W\delta + \epsilon$$

其中 $W = (X, Z)$, $\delta = \begin{pmatrix}\beta \\ \gamma\end{pmatrix}$, 且 $W: n\times(p+t)$ 的秩為 $p+t$.

令 $\hat{\delta}_G = \begin{pmatrix}\hat{\beta}_G \\ \hat{\gamma}_G\end{pmatrix}$ 是 δ 的 LSE.

15% (i) 証明 $\hat{\beta}_G = \hat{\beta} - L\hat{\gamma}_G$, $\hat{\gamma}_G = (Z'RZ)^{-1}Z'RY$, 其中 $L = (X'X)^{-1}X'Z$, $R = I_n - X(X'X)^{-1}X'$

15% (ii) 模式(1)與模式(2)的殘差平方和那一個較大？詳細証明你的理由。