中國統計學報
第37卷第4期
八十八年十二月
349–370頁

不同等級產品的經濟製程管制

楊素芬　劉泰亨
國立政治大學統計學系

摘　要

自 *Duncan(1956)* 提出 $\bar{X}$ 管制圖的經濟設計 *(Economic Design of $\bar{X}$ Control Charts)* 以來，已陸續有許多學者提出各種經濟管制圖之研究。近年來，隨著消費者對產品需求的多元化，採用多等級製程的生產方式已成爲廠商製造產品的一種策略。本研究乃擴展 *Banerjee and Rahim(1987)* 的更新理論 *(Renewal Theory)* 方法以建立追蹤生產二個等級產品之製程成本模式，並透過最佳化的技巧得到二個 *EWMA* 經濟管制圖之最佳設計參數。文末舉例說明二個 *EWMA* 經濟管制圖的建立與應用，若業者希望以最低成本來維持生產二個等級產品之製程，則可依本文所提出的方法建立經濟 *EWMA* 管制圖。本文所提出之二個等級產品製程管制之方法仍可擴展爲多等級產品之製程管制。

關鍵詞：　多等級產品，更新理論，非機遇因素，管制圖。

美國數學會分類索引：　主要 60K05；次要 65D15。

1. 緒論

自 Shewhart (1931) 發明管制圖後，管制圖已廣被業者用以做爲監控製程的工具。然而Shewhart 型$\bar{X}$管制圖適用於偵測單一產品生產線上製程變數的平均值偏移幅度較大的時候，對於平均數的偏移幅度較小時則較不敏感(如見Montgomery, 1996)，因此陸續有學者提出當製程變數的平均值是小幅度偏移的監控方法，諸如CUSUM管制圖(Cumulative-Sum Chart)和$EWMA$管制圖(Exponentially Weighted Moving Average Control Chart)等。

隨著時代變遷，商品市場的需求漸趨多元，爲了滿足客戶多元的需求，採用多等級產品製程的生產方式已成爲廠商製造產品的一種策略。多等級產品製程即同一條生產線可以生產出多種等級之產品，不同等級產品之產量是由生產工程師事先安排決定的。在多等級產品製程中，非機遇因素(Assignable Cause)的發生可能會使製程變數的平均值產生偏移，是以Doganaksoy，Schmee和Vandeven (1996) 提出使用$EWMA$管制圖監控多等級產品製程的方法以有效診斷出製程失控是由影響那個等級產品的非機遇因素發生。然而目前並無文獻由經濟層面探討如何利用$EWMA$管制圖以監控多等級產品製程的方法。本文主要探討如何由經濟觀點設計二個$EWMA$管制圖以監控生產二個等級產品的製程。

研究中設計二個獨立的$EWMA$經濟管制圖以監控製程的成本模式乃擴展Banerjee and Rahim (1987) 的更新理論方法推導而得，接著透過最佳化的技巧，決定二個$EWMA$經濟管制圖之最適設計參數值。於是二個$EWMA$的經濟管制圖得以被建立而用以追蹤二個等級產品的製程管制。本文最後以數值例子說明$EWMA$經濟管制圖的建立與應用。

2. 製程模式之建立

2.1 製程模式之假設

本節所討論之製程爲生產二個等級產品之製程，並假設製程上只有二個分別會影響第一個和第二個等級產品品質特性平均值的非機遇因素。爲以最小成本有效監控製程狀態，我們建立二個$EWMA$經濟管制圖以分別檢視此

二等級產品品質特性之平均值是否發生偏移。在建立二個 $EWMA$ 管制圖的經濟模式之前，我們必須先對製程做以下的假設：

1. 在第 g 個產品等級下，有興趣的產品品質特性爲一可測量的隨機變數 (X_g, $g = 1, 2$)。當製程處於穩定狀態，即製程不受任何非機遇因素影響時，X_g 爲一個服從常態分配，期望值爲 μ_g，變異數爲 σ_g^2 的隨機變數，其中 μ_g 及 σ_g^2 均爲已知常數，即 $X_g \sim N(\mu_g, \sigma_g^2)$。

2. 製程上有二個非機遇因素，稱爲 AC_1 和 AC_2。此二非機遇因素發生於製程的時間(V_g)爲互相獨立且服從參數爲 r_g 的指數分配，$g = 1,2$。$g = 1$ 表第一個等級產品，$g = 2$ 表第二個等級產品。實務上，適合此假設之非機遇因素如原物料差異。然而，固定生產設備和操作人員等則不符合此假設。

3. AC_g 發生時只影響第 g 個等級產品之品質特性值，而不影響另一個等級產品，$g = 1,2$。

4. 任何非機遇因素發生，只會影響製程平均數偏移，而製程變異數不變，所以當第 g 個等級製程受 AC_g 影響而處於失控狀態時，製程變數 X_g 服從期望值爲 $\mu_g + \delta_g$，變異數爲 σ_g^2 的常態分配，即 $X_g \sim N(\mu_g + \delta_g, \sigma_g^2)$，其中 δ_g 爲偏移幅度，$\delta_g \neq 0$, $g = 1,2$。

5. 製程開始時都處於穩定（In Control）狀態，直到非機遇因素於製程上被發現並排除後製程才恢復穩定狀態。這段時間稱之爲循環時間(Cycle Time)。循環時間彼此互相獨立且具有相同的分配，於是整個製程可視爲是一系列的循環，亦即製程被表示爲一個更新過程。而在每個循環時間內所發生的累積成本稱之爲循環成本(Cycle Cost)，循環成本彼此間亦是互相獨立且具有相同的分配。此種考慮成本之製程即爲更新報酬過程(Renewal Reward Process) (Ross, 1993)。

6. 製程是非連續性的，即當管制圖發生警訊後即停止製程營運，再進行非機遇因素的搜尋及製程的修復工作。

7. 一旦非機遇因素發生於製程上，非經人爲修理或調整，製程不會自動校正。

8. 抽樣間隔時間固定爲 h，且每次抽樣的樣本大小爲1。每次抽樣與檢定之成本固定爲 a。

9. 檢出產品等級是 g 的機率爲 w_g，且 $\sum_{g=1}^{2} w_g = 1$。

10. 以$EWMA_i$管制圖監控第i個等級產品品質特性值，其管制中心線為0，漸近的管制上下限分別為$k_i\sqrt{\frac{\lambda_i}{2-\lambda_i}}$及$-k_i\sqrt{\frac{\lambda_i}{2-\lambda_i}}$，其中$k_i$為$EWMA_i$圖管制界限係數，$\lambda_i$為$EWMA_i$統計量的權重，$i=1,2$。

11. 由於抽樣和檢定的時間很短，故予以忽略不計。

做了以上的假設之後，我們再將製程模式建立時需用到的其他符號定義如下：

1. $E(T)$ ： 期望循環時間。
2. $E(T_i)$ ： 已知AC_i發生在h時間內，自h時抽檢到第i個等級產品品質特性值，其管制圖並未發生真實警訊，至尋找並修復最後一個真實警訊的平均時間，$i=1,2$。
3. $E(T_{12})$ ： 已知AC_1與AC_2皆發生在h時間內，自h時抽檢到第1個等級產品品質特性值，其管制圖並未發生真實警訊，至尋找並修復最後一個真實警訊的平均時間。
4. t_{0i} ： 尋找第i個管制圖發生錯誤警訊的平均時間，$i=1,2$。
5. t_{1i} ： 尋找並修復第i個管制圖發生真實警訊的平均時間，$i=1,2$。
6. $E(C)$ ： 期望循環成本。
7. $E(C_i)$ ： 發生在$E(T_i)$內的平均成本，$i=1,2$。
8. $E(C_{12})$ ： 發生在$E(T_{12})$內平均成本。
9. a ： 抽檢的成本。
10. a_{0i} ： 尋找第i個管制圖發生錯誤警訊的平均成本，$i=1,2$。
11. a_{1i} ： 尋找並修復第i個管制圖發生真實警訊的平均成本，$i=1,2$。
12. c_0 ： 製程在管制狀態下每單位時間的製程成本。
13. c_i ： 製程受到AC_i影響時每單位時間的製程成本，$i=1,2$。
14. c_{12} ： 製程同時受到AC_1與AC_2影響時每單位時間的製程成本。

15. τ_i ： 已知只有AC_i發生於h時間內，該非機遇因素的平均發生時間，$i=1,2$。

16. $\tau_{(k)12}$ ： 已知AC_1與AC_2同時發生於h時間內，第k個到達的非機遇因素之平均發生時間，$i=1,2$。

17. α_i ： 已知製程在管制狀態下，第i個管制圖出現錯誤警訊的機率。

18. β_i ： 已知製程受到AC_i的影響，第i個管制圖沒有出現眞實警訊的機率。

19. P_i ： 在時間h時，製程處於狀態i的機率，$i=1,2,\cdots,16$。

20. P_{ij} ： 已知在時間h時製程處於狀態i，在時間$2h$時製程轉移至狀態j的機率，$i,j=1,2,\cdots,16$。

21. D ： 發生在$\tau_{(2)12}-\tau_{(1)12}$時間內的平均成本。

2.2 製程狀態之定義及其發生之機率

欲應用更新方程式以推導出目標函數，我們必須先了解製程在第一次抽樣與檢定終了時(時間爲h時)所處的可能狀態及其發生的機率。根據二個非機遇因素發生與否及二個$EWMA$管制圖是否出現警訊可知道在第一次抽樣與檢定終了時製程所處的可能狀態共有十六種。本節僅說明狀態1、6，13和16之定義及其發生之機率，其他狀態之定義及發生之機率則可仿照而得(見表2.1)。

狀態1：已知製程中無任何非機遇因素發生，第一個等級產品被抽檢到且$EWMA_1$管制圖亦無錯誤警訊出現，此時製程變數X_1的分配爲$X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，而$EWMA_1$管制圖無錯誤警訊發生的機率爲$(1-\alpha_1)$，故本狀態發生之機率爲$e^{-(r_1+r_2)h}w_1(1-\alpha_1)$，其中$\alpha_1$之計算見附錄二。

狀態6：已知AC_1發生在製程中，第一個等級產品被抽檢到且$EWMA_1$管制圖出現眞實警訊，此時製程變數X_1的分配爲$X_1\sim N(\mu_1+\delta_1,\sigma_1^2)$，而$EWMA_1$管制圖出現眞實警訊的機率爲$1-\beta_1$，故本狀態發生之機率爲$(1-e^{-r_1h})e^{-r_2h}w_1(1-\beta_1)$。其中$\beta_1$之計算見附錄二。

狀態13：已知AC_1和AC_2皆發生在製程中，第一個等級產品被抽檢到但$EWMA_1$管制圖並無出現眞實警訊，此時製程變數X_1的分配爲$X_1 \sim N(\mu_1+\delta_1,\ \sigma_1^2)$，而$EWMA_1$管制圖沒有出現眞實警訊的機率爲$\beta_1$，故本狀態發生之機率爲$(1-e^{-r_1 h})(1-e^{-r_2 h})w_1\beta_1$。

狀態16：已知AC_1和AC_2皆發生在製程中，第二個等級產品被抽檢到且$EWMA_2$管制圖出現眞實警訊，此時製程變數X_2的分配爲$X_2 \sim N(\mu_2+\delta_2,\ \sigma_2^2)$，而$EWMA_2$管制圖出現眞實警訊的機率爲$1-\beta_2$，故本狀態發生之機率爲$(1-e^{-r_1 h})(1-e^{-r_2 h})w_2(1-\beta_2)$。

表2.1　在第一次抽樣與檢定終了時製程所處各種可能狀態及其發生之機率

狀態 i	在時間h內各非機遇因素是否發生		管制圖是否出現警訊		各狀態發生的機率(P_i)
	AC_1	AC_2	$EWMA_1$	$EWMA_2$	
1	否	否	否		$P_1 = e^{-(r_1+r_2)h}\cdot w_1\cdot(1-\alpha_1)$
2	否	否	是		$P_2 = e^{-(r_1+r_2)h}\cdot w_1\cdot\alpha_1$
3	否	否		否	$P_3 = e^{-(r_1+r_2)h}\cdot w_2\cdot(1-\alpha_2)$
4	否	否		是	$P_4 = e^{-(r_1+r_2)h}\cdot w_2\cdot\alpha_2$
5	是	否	否		$P_5 = (1-e^{-r_1 h})e^{-r_2 h}\cdot w_1\cdot\beta_1$
6	是	否	是		$P_6 = (1-e^{-r_1 h})e^{-r_2 h}\cdot w_1\cdot(1-$
7	是	否		否	$P_7 = (1-e^{-r_1 h})e^{-r_2 h}\cdot w_2\cdot(1-$
8	是	否		是	$P_8 = (1-e^{-r_1 h})e^{-r_2 h}\cdot w_2\cdot\alpha_2$
9	否	是	否		$P_9 = e^{-r_1 h}(1-e^{-r_2 h})\cdot w_1\cdot(1-$
10	否	是	是		$P_{10} = e^{-r_1 h}(1-e^{-r_2 h})\cdot w_1\cdot\alpha_1$
11	否	是		否	$P_{11} = e^{-r_1 h}(1-e^{-r_2 h})\cdot w_2\cdot\beta_2$
12	否	是		是	$P_{12} = e^{-r_1 h}(1-e^{-r_2 h})\cdot w_2\cdot(1$

表2.1（續）在第一次抽樣與檢定終了時製程所處各種可能狀態及其發生之機率

狀態 i	在時間h內各非機遇因素是否發生		管制圖是否出現警訊		各狀態發生的機率(P_i)
	AC_1	AC_2	$EWMA_1$	$EWMA_2$	
13	是	是	否		$P_{13}=(1-e^{-r_1h})(1-e^{-r_2h})\cdot w_1$
14	是	是	是		$P_{14}=(1-e^{-r_1h})(1-e^{-r_2h})\cdot w_1$
15	是	是		否	$P_{15}=(1-e^{-r_1h})(1-e^{-r_2h})\cdot w_2$
16	是	是		是	$P_{16}=(1-e^{-r_1h})(1-e^{-r_2h})\cdot w_2$

2.3 目標函數之推導

2.3.1 期望循環時間之推導

期望循環時間是指製程從開始運作到所有非機遇因素都被發現且排除後，製程又重新開始運作前的這段期間的平均值，它是由第一次抽樣與檢定終了的時間(時間h)加上期望殘差循環時間而得。期望殘差循環時間即是從第一次抽樣與檢定終了後直到所有非機遇因素都被發現且排除，製程又重新開始運作前的這段期間的平均值。應用更新理論的方法，我們可以計算期望殘差循環時間。狀態1、6，13和16之期望殘差循環時間計算方法如下，其他的則可仿照計算(見表2.2)。

狀態1：已知在h時製程處於穩定狀態且管制圖無錯誤警訊發生，故製程繼續運作，所以期望殘差循環時間(RT_1)即爲期望循環時間，即

$$RT_1 = E(T)。 \tag{2. 1}$$

狀態6：製程已知在h時間內受到一種非機遇因素影響，且監控的管制圖上出現眞實警訊，故期望殘差循環時間(RT_6)爲第一次檢定終了後尋找並修

復該眞實警訊的平均時間，即

$$RT_6 = t_{11} \text{。} \tag{2. 2}$$

狀態13：製程已知在h時間內受到二個非機遇因素影響，但管制圖上並未出現眞實警訊，故期望殘差循環時間(RT)爲第一次檢定終了後直到尋找並修復最後一個眞實警訊的平均時間，即

$$RT_{13} = E(T_{12}) \text{，} \tag{2. 3}$$

$E(T_{12})$之計算見附錄一(1)、(3)。

狀態16：製程已知在h時間內受到二個非機遇因素影響，且有一個管制圖上出現眞實警訊，故期望殘差循環時間(RT)爲尋找並修復該眞實警訊的平均時間加上第一次檢定終了後直到尋找並修復最後一個眞實警訊的平均時間，即

$$RT_{16} = t_{12} + E(T_1) \text{，} \tag{2. 4}$$

$E(T_1)$之計算見附錄一(1)、(3)。

表2.2 各種製程狀態之期望殘差循環時間

狀態 i	各狀態下的期望殘差循環時間(RT_i)	狀態 i	各狀態下的期望殘差循環時間(RT_i)
1	$RT_1 = E(T)$	9	$RT_9 = E(T_2)$
2	$RT_2 = t_{01} + E(T)$	10	$RT_{10} = t_{01} + E(T_2)$
3	$RT_3 = E(T)$	11	$RT_{11} = E(T_2)$
4	$RT_4 = t_{02} + E(T)$	12	$RT_{12} = t_{12}$
5	$RT_5 = E(T_1)$	13	$RT_{13} = E(T_{12})$
6	$RT_6 = t_{11}$	14	$RT_{14} = t_{11} + E(T_2)$
7	$RT_7 = E(T_1)$	15	$RT_{15} = E(T_{12})$
8	$RT_8 = t_{02} + E(T_1)$	16	$RT_{16} = t_{12} + E(T_1)$

於是期望殘差循環時間為製程所處可能狀態之期望殘差循環時間與對應機率乘積之和，即：$\Sigma_{i=1}^{16} P_i RT_i$。
期望循環時間為h加上期望殘差循環時間，即

$$E(T) = h + \Sigma_{i=1}^{16} P_i RT_i \tag{2. 5}$$

移項整理之後，我們可以得到期望循環時間為：

$$E(T) = \frac{h + P_2 t_{01} + P_4 t_{02} + \Sigma_{i=5}^{16} P_i RT_i}{1 - \Sigma_{i=1}^{4} P_i} \text{。} \tag{2. 6}$$

2.3.2 期望循環成本之推導

期望循環成本是指製程從開始運作到所有非機遇因素都被發現且排除後，製程又重新開始運作前的這段期間內所發生的平均成本。它是第一次抽樣與檢定期間的成本加上期望殘差循環成本而得。第一次抽樣與檢定期間的成本為(1)第一次抽檢期間(h)內所發生的成本及(2)第一次抽樣與檢定成本之和。製程在狀態1、6，13和16的第一次抽檢期間內之成本(S_i, $i = 1, 6, 13, 16$)說明如下，其他的則可仿照推得(見表2.3)：

狀態1：已知製程從開始運作至第一次抽樣與檢定期間終了時均處於穩定狀態，故其成本為

$$S_1 = c_0 h + a_0 \text{。} \tag{2. 7}$$

狀態6：已知AC_1在第一次抽樣與檢定期間終了之前發生在製程上，在這段期間內，製程處於穩定狀態的平均時間為τ_1，處於失控狀態之平均時間為$h - \tau_1$，故其成本為

$$S_6 = c_0 \tau_1 + c_1(h - \tau_1) + a_0 \text{，其中 } \tau_1 = \frac{1 - e^{-r_1 h} - r_1 h e^{-r_1 h}}{r_1(1 - e^{-r_1 h})} \tag{2. 8}$$

(見Panagos, Heikes and Montgomery (1985))。

狀態13，16：已知AC_1與AC_2在第一次抽樣與檢定期間終了之前發生在製程上，在這段期間內，製程處於穩定狀態的平均時間為$\tau_{(1)12}$，製程受到一個非機遇因素影響後，直到製程再受到下一個非機遇因素影響的平均時間為

$\tau_{(2)12}-\tau_{(1)12}$，製程受到二個非機遇因素影響的平均時間爲$h-\tau_{(2)12}$，故其成本爲$S_{13}=S_{16}=c_0\tau_{(1)12}+D(\tau_{(2)12}-\tau_{(1)12})+c_{12}(h-\tau_{(2)12})+a_0$，其中

$$\tau_{(1)12}=\frac{e^{-(r_1+r_2)h}(h+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1+r_2})-\frac{e^{-r_1h}}{r_2}-\frac{e^{-r_2h}}{r_1}+\frac{1}{r_1+r_2}}{(1-e^{-r_1h})(1-e^{-r_2h})},$$

$$\tau_{(2)12}=\frac{\mathrm{e}^{-(\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_2)\mathrm{h}}(\mathrm{h}+\frac{1}{\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_2})-\mathrm{e}^{-\mathrm{r}_1\mathrm{h}}(\mathrm{h}+\frac{1}{\mathrm{r}_1})-\mathrm{e}^{-\mathrm{r}_2\mathrm{h}}(\mathrm{h}+\frac{1}{\mathrm{r}_2})+(\frac{1}{\mathrm{r}_1}+\frac{1}{\mathrm{r}_2}-\frac{1}{\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_2})}{(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{r}_1\mathrm{h}})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{r}_2\mathrm{h}})}$$

$$D=\frac{\frac{r_1c_1+r_2c_2}{r_1+r_2}-(c_1e^{-r_2h}+c_2e^{-r_1h})+\frac{r_2c_1+r_1c_2}{r_1+r_2}e^{-(r_1+r_2)h}}{(1-e^{-r_1h})(1-e^{-r_2h})}\text{。} \tag{2. 10}$$

(以上證明見楊素芬和鄭明芳(1994)及附錄三)。

期望殘差循環成本即是從第一次抽樣與檢定終了後直到所有非機遇因素都被發現且排除，製程又重新開始運作前的這段期間所發生的平均成本。仿照期望殘差循環時間的計算方式，我們可以計算期望殘差循環成本。製程在狀態1、6，13和16之期望殘差循環成本說明如下，其他的則可仿照推得(見表2.3)：

狀態1：已知製程處於穩定狀態且管制圖無錯誤警訊發生，故檢定終了時製程繼續運作，所以期望殘差循環成本(RC_1)即爲期望循環成本，即

$$RC_1=E(C)\text{。} \tag{2. 11}$$

狀態6：已知製程在第一次抽樣與檢定終了前受到一種非機遇因素影響，且監控的管制圖上出現眞實警訊，故期望殘差循環成本(RC_6)爲檢定終了後尋找並修復眞實警訊的平均成本，即

$$RC_6=a_{11}\text{。} \tag{2. 12}$$

狀態13：已知製程在第一次抽樣和檢定終了前受到二個非機遇因素影響，但管制圖上並未出現眞實警訊，故期望殘差循環成本(RC_{13})爲檢定終了後直到尋找並修復最後一個眞實警訊的平均成本，即

$$RC_{13}=E(C_{12}), \tag{2. 13}$$

$E(C_{12})$之計算見附錄一(2)、(4)。

狀態16：已知製程在第一次抽樣和檢定終了前受到二個非機遇因素影響，且有一個管制圖上出現眞實警訊，故期望殘差循環成本(RC_{16})爲尋找並修復該眞實警訊的平均成本加上檢定終了後直到尋找並修復最後一個眞實警訊的平均成本，即

$$RC_{16} = a_{12} + E(C_1), \tag{2. 14}$$

$E(C_1)$之計算見附錄一(2)、(4)。

表2.3 各種製程狀態之第一次抽樣與檢定期間成本與期望殘差循環成本

狀態 i	第一次抽樣與檢定期間成本(S_i)	期望殘差循環成本(RC_i)
1	$S_1 = \{c_0 h + a\}$	$RC_1 = E(C)$
2	$S_2 = \{c_0 h + a\}$	$RC_2 = a_{01} + E(C)$
3	$S_3 = \{c_0 h + a\}$	$RC_3 = E(C)$
4	$S_4 = \{c_0 h + a\}$	$RC_4 = a_{02} + E(C)$
5	$S_5 = \{c_0\tau_1 + c_1(h-\tau_1) + a\}$	$RC_5 = E(C_1)$
6	$S_6 = \{c_0\tau_1 + c_1(h-\tau_1) + a\}$	$RC_6 = a_{11}$
7	$S_7 = \{c_0\tau_1 + c_1(h-\tau_1) + a\}$	$RC_7 = E(C_1)$
8	$S_8 = \{c_0\tau_1 + c_1(h-\tau_1) + a\}$	$RC_8 = a_{02} + E(C_1)$
9	$S_9 = \{c_0\tau_2 + c_2(h-\tau_2) + a\}$	$RC_9 = E(C_2)$
10	$S_{10} = \{c_0\tau_2 + c_2(h-\tau_2) + a\}$	$RC_{10} = a_{01} + E(C_2)$
11	$S_{11} = \{c_0\tau_2 + c_2(h-\tau_2) + a\}$	$RC_{11} = E(C_2)$
12	$S_{12} = \{c_0\tau_2 + c_2(h-\tau_2) + a\}$	$RC_{12} = a_{12}$
13	$S_{13} = \{c_0\tau_{(1)12} + D(\tau_{(2)12} - \tau_{(1)12}) + c_{12}(h - \tau_{(2)12}) + a\}$	$RC_{13} = E(C_{12})$
14	$S_{14} = \{c_0\tau_{(1)12} + D(\tau_{(2)12} - \tau_{(1)12}) + c_{12}(h - \tau_{(2)12}) + a\}$	$RC_{14} = a_{11} + E(C_2)$
15	$S_{15} = \{c_0\tau_{(1)12} + D(\tau_{(2)12} - \tau_{(1)12}) + c_{12}(h - \tau_{(2)12}) + a\}$	$RC_{15} = E(C_{12})$
16	$S_{16} = \{c_0\tau_{(1)12} + D(\tau_{(2)12} - \tau_{(1)12}) + c_{12}(h - \tau_{(2)12}) + a\}$	$RC_{16} = a_{12} + E(C_1)$

接著，應用更新理論的方法，則可獲得更新方程式如下：

$$E(C) = \sum_{i=1}^{16} P_i(S_i + RC_i)。 \tag{2. 15}$$

移項整理之後，我們可以得到期望循環成本爲：

$$E(C)=\frac{P_2a_{01}+P_4a_{02}+\{c_0h+a\}\sum_{i=1}^{4}P_i+\sum_{i=5}^{16}P_i(S_i+RC_i)}{1-\sum_{i=1}^{4}P_i}\text{。(2. 16)}$$

2.3.3 目標函數的推導

前面二小節，我們已分別計算出期望循環時間和期望循環成本，接著利用更新報酬過程的性質將 $E(C)$ 除以 $E(T)$ 則可推導出單位時間近似成本，此即爲目標函數，以 EV_∞ 表示：

$$\begin{aligned}EV_\infty &= \frac{E(C)}{E(T)}\\ &= \frac{P_2a_{01}+P_4a_{02}+\{c_0h+a\}\sum_{i=1}^{4}P_i+\sum_{i=5}^{16}P_i(S_i+RC_i)}{h+P_2t_{01}+P_4t_{02}+\sum_{i=5}^{16}P_iRT_i}\text{。(2. 17)}\end{aligned}$$

各狀態發生的機率、期望循環時間與期望循環成本皆爲二個 $EWMA$ 管制圖設計參數 $(h,k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2)$ 之函數，所以目標函數 EV_∞ 也是 $(h,k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2)$ 之函數。透過最佳化技巧將目標函數最小化，即可決定最佳設計參數值 $(h^*、k_1^*、k_2^*、\lambda_1^*、\lambda_2^*)$，於是以最小成本分別追蹤二個不同等級產品之二個經濟 $EWMA$ 管制圖之架構如圖2.1。在追蹤製程狀態時，每隔 h^* 時間單位由製程中抽取樣本，若爲第 g 個等級產品則量測其品質特性值 X_g，將 X_g 標準化得 $Z_g(Z_g\sim N(0,1))$ 後再代入(2.18)式以計算管制圖上描點統計量的值 $ewma_g$，最後將該值點入 $EWMA_g$ 管制圖上，依其落於管制界限內或外而判斷製程是否失控。

$$ewma_{g,t}=\lambda_g^*Z_{g,t}+(1-\lambda_g^*)ewma_{g,t-1},0<\lambda_g^*\le 1,\ t=1,2,3,\cdots,\ g=1,2\text{，(}$$

其中 t 爲樣本數，設定起始值 $ewma_{g,0}=0$。

圖2.1　二個經濟EWMA管制圖架構

$EWMA_1$ 管制圖

——————— $UCL=k_1^*\times\sqrt{\frac{\lambda_1^*}{2-\lambda_1^*}}$

——————— $CL=0$

——————— $LCL=-k_1^*\times\sqrt{\frac{\lambda_1^*}{2-\lambda_1^*}}$

$EWMA_2$ 管制圖

———————— $UCL = k_2^* \times \sqrt{\frac{\lambda_2^*}{2-\lambda_2^*}}$

———————— $CL = 0$

———————— $LCL = -k_2^* \times \sqrt{\frac{\lambda_2^*}{2-\lambda_2^*}}$

3. 舉例說明$EWMA$經濟管制圖之建立與應用

由於目標函數爲設計參數$(h, k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2)$的函數，對於特定的製程和成本參數組合，我們可以計算單位時間最低平均成本及其對應之最佳設計參數值$(h^*, k_1^*, k_2^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$。由於在實務上每天工作時間爲八小時，而工程師們每天至少需檢查一次製程，因此本研究中假設抽樣時間(h)最長爲八小時，$0 < h \leq 8$；Montgomery(1996)建議使用$EWMA$管制圖來監控製程時，將管制界限參數k設定在$2.6 \sim 2.8$之間，配合較小的λ值$(\lambda \leq 0.1)$，將使$EWMA$管制圖更具效力；若$k_1 = 3$且$k_2 = 3$(3倍的標準差)時，較大的λ值則可以搭配來使用。是以本研究設定設計參數的範圍爲$2.6 \leq k_1, k_2 \leq 3$，且$0.05 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 0.15$。在進行資料分析時爲使計算簡單，我們選擇$k_1, k_2 = 2.6,\ 2.65,\ 2.7, \cdots, 3.0$，$\lambda_1, \lambda_2 = 0.05,\ 0.10,\ 0.15$。而抽樣時間單位則設定爲小時，即$h = 1, 2, \cdots, 8$。於是將目標函數與限制式以數學式表示則爲

$$\begin{aligned} &min \quad EV_\infty = f(h, k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2),\ 1 \leq h \leq 8, \\ &\text{滿足} \quad 2.6 \leq k_1, k_2 \leq 3.0,\ \ 0.05 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 0.15\text{。} \end{aligned} \tag{3. 1}$$

另外，我們設定製程和成本參數值爲$r_1 = 0.05$、$r_2 = 0.01$、$\delta = 1.5$、$t_{01} = 0.5$、$t_{02} = 1$、$t_{11} = 2$、$t_{12} = 3$、$a_{11} = 500$、$a_{12} = 600$、$a_{01} = 250$、$a_{02} = 30$、$c_1 = 500$、$c_2 = 150$、$c_0 = 10$、$c_{12} = 1000$，$a = 0.5$。於是利用格子點法可決定單位時間最低成本及最佳設計參數$h^* = 1$、$k_1^* = 2.6$、$k_2^* = 2.6$、$\lambda_1^* = 0.15$、$\lambda_2^* = 0.15$，$min\ EV_\infty = 192.2$。於是經濟$EWMA_1$和$EWMA_2$圖的管制上下限皆爲$\pm 2.6 \times \sqrt{\frac{0.15}{2-0.15}}$(見圖3.1)。因此，以這二個經濟$EWMA$管制圖追蹤多等級產品的製程時，我們每隔一小時抽檢等級產品一次，若抽到第一個等級產品，測量其品質特性值$X_{1,t}$(t爲樣本數)並將其標

準化得 $Z_{1,t}$，再以(2.18)式計算 $ewma_{1,t}$ 後描點在 $EWMA_1$ 管制圖上；若抽到第二個等級產品，則仿照前述之方法計算 $ewma_{2,t}$ 後描點在 $EWMA_2$ 管制圖上。若描點隨機地落在管制界限之內，表示製程處於管制狀態，則製程持續運作；若描點跳出 $EWMA_1$ 或 $EWMA_2$ 圖的管制界限之外則表示影響個別等級之非機遇因素可能發生在製程上。一旦描點落於管制界限之外時，就必須立即尋找警訊發生的原因，若是錯誤警訊，則製程仍繼續運作，若是非機遇因素發生在製程上，則應立即加以排除並調整製程使其回復至管制狀態下再開始運作。以此二個經濟 $EWMA$ 管制圖追蹤製程將會使製程發生的單位時間成本爲最小，其平均每單位時間所花費的成本爲192.2個單位。

有關單位時間最低成本及最佳設計參數之決定方法，本節採用最簡易的格子點法。唯若時間許可，則可採用quasi-Newton 方法或其他更有效的方法在設計參數的設定連續範圍內，$2.6 \le k_1, k_2 \le 3$，$0.05 \le \lambda_1, \lambda_2 \le 0.15$，及 $0 < h \le 8$，決定較精確的單位時間最低成本，$min\ EV_\infty$，及最佳設計參數 h^*、k_1^*、k_2^*、λ_1^*，λ_2^*。

圖3.1 二個經濟EWMA管制圖架構

(1) $EWMA_1$ 管制圖

———————— $UCL = 2.6 \times \sqrt{\frac{0.15}{2-0.15}} = 0.74$

———————— $CL = 0$

———————— $LCL = -2.6 \times \sqrt{\frac{0.15}{2-0.15}} = -0.74$

(2) $EWMA_2$ 管制圖

———————— $UCL = 2.6 \times \sqrt{\frac{0.15}{2-0.15}} = 0.74$

———————— $CL = 0$

———————— $LCL = -2.6 \times \sqrt{\frac{0.15}{2-0.15}} = -0.74$

4. 結論與建議

本研究探討二個等級產品之經濟製程管制。經濟模型之推導乃擴展Banerjee and Rahim(1987) 更新理論的方法而得，接著透過最佳化的技巧找出各系統參

數組合下的最佳設計參數值及單位時間最低成本。於是以最小成本分別追蹤二個等級產品品質特性之經濟$EWMA$管制圖得以建立。

本研究以經濟觀點設計二個$EWMA$管制圖以監控生產二個等級產品之製程，若是三個等級以上的多等級產品製程，其經濟管制圖之設計方法也可以容易的以更新理論方法擴展而得。另外，本研究只探討二個等級產品單一品質特性之製程監控，倘若可觀測之產品品質特性是多元的，其製程之監控方式與管制圖經濟設計模式之建立是否仍可擴展本研究之方法而得則是後續研究者可以研究的方向。

致謝詞：感謝評審們提供寶貴意見，使本文內容更完備。本研究由行政院國家科學委員會專題研究補助，計劃編號NSC 87-2118-M-004-008，謹此致謝。

附錄

附錄一 $E(T_1)$、$E(T_2)$、$E(T_{12})$、$E(C_1)$，$E(C_2)$和$E(C_{12})$的推導

(1) T_1，T_2和T_{12}的分配

(一)已知在時間h時，製程處於狀態5。令T_1表已知AC_1發生在時間h內，自h時抽檢到第1個等級產品品質特性值，其管制圖上並未發生眞實警訊，直到尋找並修復最後一個眞實警訊的時間。T_1的分配如下：

1	$T_1 \overset{d}{=} h + T_1$	w.p.	$P_{55} = e^{-r_2 h} w_1 \beta_1$
2	$T_1 \overset{d}{=} h + t_{11}$	w.p.	$P_{56} = e^{-r_2 h} w_1 (1 - \beta_1)$
3	$T_1 \overset{d}{=} h + T_1$	w.p.	$P_{57} = e^{-r_2 h} w_2 (1 - \alpha_2)$
4	$T_1 \overset{d}{=} h + t_{02} + T_1$	w.p.	$P_{58} = e^{-r_2 h} w_2 \alpha_2$
5	$T_1 \overset{d}{=} h + T_{12}$	w.p.	$P_{5(13)} = (1 - e^{-r_2 h}) w_1 \beta_1$
6	$T_1 \overset{d}{=} h + t_{11} + T_2$	w.p.	$P_{5(14)} = (1 - e^{-r_2 h}) w_1 (1 - \beta_1)$
7	$T_1 \overset{d}{=} h + T_{12}$	w.p.	$P_{5(15)} = (1 - e^{-r_2 h}) w_2 \beta_2$
8	$T_1 \overset{d}{=} h + t_{12} + T_1$	w.p.	$P_{5(16)} = (1 - e^{-r_2 h}) w_2 (1 - \beta_2)$

(二)已知在時間h時，製程處於狀態9。令T_2表已知AC_2發生在時間h內，

自 h 時抽檢到第2個等級產品品質特性值，其管制圖上並未發生眞實警訊，直到尋找並修復最後一個眞實警訊的時間。T_2 的分配如下：

1	$T_2 \overset{d}{=} h + T_2$	w.p.	$P_{99} = e^{-r_1 h} w_1(1-\alpha_1)$
2	$T_2 \overset{d}{=} h + t_{01} + T_2$	w.p.	$P_{9(10)} = e^{-r_1 h} w_1 \alpha_1$
3	$T_2 \overset{d}{=} h + T_2$	w.p.	$P_{9(11)} = e^{-r_1 h} w_2 \beta_2$
4	$T_2 \overset{d}{=} h + t_{12}$	w.p.	$P_{9(12)} = e^{-r_1 h} w_2(1-\beta_2)$
5	$T_2 \overset{d}{=} h + T_{12}$	w.p.	$P_{9(13)} = (1-e^{-r_1 h}) w_1 \beta_1$
6	$T_2 \overset{d}{=} h + t_{11} + T_2$	w.p.	$P_{9(14)} = (1-e^{-r_1 h}) w_1(1-\beta_1)$
7	$T_2 \overset{d}{=} h + T_{12}$	w.p.	$P_{9(15)} = (1-e^{-r_1 h}) w_2 \beta_2$
8	$T_2 \overset{d}{=} h + t_{12} + T_1$	w.p.	$P_{9(16)} = (1-e^{-r_1 h}) w_2(1-\beta_2)$

(三)已知在時間 h 時，製程處於狀態13。令 T_{12} 表已知 AC_1 與 AC_2 皆發生在時間 h 內，自 h 時抽檢到第1個等級產品品質特性值，其管制圖上並未發生眞實警訊，直到尋找並修復最後一個眞實警訊的時間。T_{12} 的分配如下：

1	$T_{12} \overset{d}{=} h + T_{12}$	w.p.	$P_{(13)(13)} = w_1 \beta_1$
2	$T_{12} \overset{d}{=} h + t_{11} + T_2$	w.p.	$P_{(13)(14)} = w_1(1-\beta_1)$
3	$T_{12} \overset{d}{=} h + T_{12}$	w.p.	$P_{(13)(15)} = w_2 \beta_2$
4	$T_{12} \overset{d}{=} h + t_{12} + T_1$	w.p.	$P_{(13)(16)} = w_2(1-\beta_2)$

(2) C_1，C_2 和 C_{12} 的分配

(一)已知在時間 h 時，製程處於狀態5。令 C_1 表已知 AC_1 發生在時間 h 內，自 h 時抽檢到第1個等級產品品質特性值，其管制圖上並未發生眞實警訊，直到尋找並修復最後一個眞實警訊的成本。C_1 的分配如下：

1	$C_1 \overset{d}{=} \{c_1 h + a_0\} + C_1$	w.p.	$P_{55} = e^{-r_2 h} w_1 \beta_1$
2	$C_1 \overset{d}{=} \{c_1 h + a_0\} + a_{11}$	w.p.	$P_{56} = e^{-r_2 h} w_1 (1-\beta_1)$
3	$C_1 \overset{d}{=} \{c_1 h + a_0\} + C_1$	w.p.	$P_{57} = e^{-r_2 h} w_2 (1-\alpha_2)$
4	$C_1 \overset{d}{=} \{c_1 h + a_0\} + b_{12} + C_1$	w.p.	$P_{58} = e^{-r_2 h} w_2 \alpha_2$
5	$C_1 \overset{d}{=} \{c_1 \tau_2 + c_{12}(h-\tau_2) + a_0\} + C_{12}$	w.p.	$P_{5(13)} = (1-e^{-r_2 h}) w_1 \beta_1$
6	$C_1 \overset{d}{=} \{c_1 \tau_2 + c_{12}(h-\tau_2) + a_0\} + a_{11} + C_2$	w.p.	$P_{5(14)} = (1-e^{-r_2 h}) w_1 (1-\beta_1)$
7	$C_1 \overset{d}{=} \{c_1 \tau_2 + c_{12}(h-\tau_2) + a_0\} + C_{12}$	w.p.	$P_{5(15)} = (1-e^{-r_2 h}) w_2 \beta_2$
8	$C_1 \overset{d}{=} \{c_1 \tau_2 + c_{12}(h-\tau_2) + a_0\} + a_{12} + C_1$	w.p.	$P_{5(16)} = (1-e^{-r_2 h}) w_2 (1-\beta_2)$

(二)已知在時間h時，製程處於狀態9。令C_2表已知AC_2發生在時間h內，自h時抽檢到第2個等級產品品質特性值，其管制圖上並未發生眞實警訊，直到尋找並修復最後一個眞實警訊的成本。C_2的分配如下：

1	$C_2 \overset{d}{=} \{c_2 h + a_0\} + C_2$	w.p.	$P_{99} = e^{-r_1 h} w_1 (1-\alpha_1)$
2	$C_2 \overset{d}{=} \{c_2 h + a_0\} + b_{11} + C_2$	w.p.	$P_{9(10)} = e^{-r_1 h} w_1 \alpha_1$
3	$C_2 \overset{d}{=} \{c_2 h + a_0\} + C_2$	w.p.	$P_{9(11)} = e^{-r_1 h} w_2 \beta_2$
4	$C_2 \overset{d}{=} \{c_2 h + a_0\} + a_{12}$	w.p.	$P_{9(12)} = e^{-r_1 h} w_2 (1-\beta_2)$
5	$C_2 \overset{d}{=} \{c_2 \tau_1 + c_{12}(h-\tau_1) + a_0\} + C_2$	w.p.	$P_{9(13)} = (1-e^{-r_1 h}) w_1 \beta_1$
6	$C_2 \overset{d}{=} \{c_2 \tau_1 + c_{12}(h-\tau_1) + a_0\} + a_{11} + C_2$	w.p.	$P_{9(14)} = (1-e^{-r_1 h}) w_1 (1-\beta_1)$
7	$C_2 \overset{d}{=} \{c_2 \tau_1 + c_{12}(h-\tau_1) + a_0\} + C_2$	w.p.	$P_{9(15)} = (1-e^{-r_1 h}) w_2 \beta_2$
8	$C_2 \overset{d}{=} \{c_2 \tau_1 + c_{12}(h-\tau_1) + a_0\} + a_{12} + C_1$	w.p.	$P_{9(16)} = (1-e^{-r_1 h}) w_2 (1-\beta_2)$

(三)已知在時間h時，製程處於狀態13。令C_{12}表已知AC_1與AC_2皆發生在時間h內，自h時抽檢產品品質特性值，其管制圖上並未發生眞實警訊，直到尋找並修復最後一個眞實警訊的成本。C_{12}的分配如下：

1	$C_{12} \overset{d}{=} \{c_{12} h + a_0\} + C_{12}$	w.p.	$P_{(13)(13)} = w_1 \beta_1$
2	$C_{12} \overset{d}{=} \{c_{12} h + a_0\} + a_{11} + C_2$	w.p.	$P_{(13)(14)} = w_1 (1-\beta_1)$
3	$C_{12} \overset{d}{=} \{c_{12} h + a_0\} + C_{12}$	w.p.	$P_{(13)(15)} = w_2 \beta_2$
4	$C_{12} \overset{d}{=} \{c_{12} h + a_0\} + a12 + C_1$	w.p.	$P_{(13)(16)} = w_2 (1-\beta_2)$

(3)

由(1)可知T_1，T_2和T_{12}之分配，於是其期望值為其可能分配之期望值與對應機率

$$E(T_1) = \frac{1}{1-(P_{55}+P_{57}+P_{58}+P_{5(16)})}\{P_{5(14)}E(T_2)+(P_{5(13)}+P_{5(15)})E(T_{12}$$
$$+h+(P_{56}+P_{5(14)})t_{11}+P_{5(16)}t_{12}+P_{58}t_{02}\}, \qquad (a)$$

$$E(T_2) = \frac{1}{1-(P_{99}+P_{9(10)}+P_{9(11)}+P_{9(14)})}\{P_{9(16)}E(T_1)+(P_{9(13)}+P_{9(15)})E$$
$$+h+P_{9(14)}t_{11}+(P_{9(12)}+P_{9(16)})t_{12}+P_{9(10)}t_{01}\}, \qquad (b)$$

$$E(T_{12}) = \frac{1}{1-(P_{(13)(13)}+P_{(13)(15)})}\{P_{(13)(16)}E(T_1)+P_{(13)(14)}+E(T_2)$$
$$+h+P_{(13)(14)}t_{11}+P_{(13)(16)}t_{12}\}, \qquad (c)$$

將(a)、(b)，(c)式解聯立方程式後即可得解$E(T_1)$，$E(T_2)$和$E(T_{12})$。

(4)

由(2)可知C_1，C_2和C_{12}之分配，於是其期望值為其可能分配之期望值與對應機率乘積之和，即：

$$E(C_1) = \frac{1}{1-(P_{55}+P_{57}+P_{58}+P_{5(16)})}\{P_{5(14)}E(C_2)+(P_{5(13)}+P_{5(15)})E(C$$
$$+(c_1h+a_0)e^{-r_2h}+[c_1\tau_2+c_{12}(h-\tau_2)+a_0](1-e^{-r_2h})$$
$$+(P_{56}+P_{5(14)})a_{11}+P_{5(16)}a_{12}+P_{58}b_{12}\}, \qquad (d)$$

$$E(C_2) = \frac{1}{1-(P_{99}+P_{9(10)}+P_{9(11)}+P_{9(14)})}\{P_{9(16)}E(C_1)+(P_{9(13)}+P_{9(15)})$$
$$+(c_2h+a_0)e^{-r_1h}+[c_2\tau_1+c_{12}(h-\tau_1)+a_0](1-e^{-r_1h})$$
$$+P_{9(14)}a_{11}+(P_{9(12)}+P_{9(16)})a_{12}+P_{9(10)}b_{11}\}, \qquad (e)$$

$$E(C_{12}) = \frac{1}{1-(P_{(13)(13)}+P_{(13)(15)})}\{P_{(13)(16)}E(C_1)+P_{(13)(11)}E(C_2) +(c_{12}h+a_0)+P_{(13)(14)}a_{11}+P_{(13)(16)}a_{12}\}, \quad (f)$$

將(d)、(e)，(f)式解聯立方程式後即可得解$E(C_1)$，$E(C_2)$和$E(C_{12})$。

附錄二 α_i和$\beta_i(i=1,2)$的計算方式

使用$EWMA$管制圖追蹤製程時，若製程只受單一非機遇因素的影響，Crowder (1987a,b)提出以數值分析的方法求得近似平均連串長度(ARL)，文獻中並附上程式以供參考。本研究探討以二個獨立的$EWMA$管制圖監控生產二個等級產品之製程，每一個別等級產品製程只受一個非機遇因素的影響，這與Crowder(1987b)所考慮的情況相似，故我們可直接引用其程式以估計個別等級產品之製程在管制狀態及失控狀態下之ARL。

已知$Z_{i,t}=(1-\lambda_i)Z_{i,t-1}+\lambda_i X_i$，$0<\lambda_i\le 1$，$i=1,2$，$t=1,2,\cdots$表示第$t$個點在第$i$個$EWMA$管制圖上的統計量，我們令$L_i(0)$及$L_i'(0)$分別表示用Crowder的方法所求得以第$i$個$EWMA$管制圖監控該製程在穩定狀態及失控狀態下之ARL，根據ARL與管制圖之型I和型II誤差機率的關係，我們可以定義並求得$\alpha_i, \beta_i, i=1,2$如下：

令$\alpha_i=Pr($第i個管制圖發生警訊$|Z_{i,t}\sim N(0,\frac{\lambda_i}{2-\lambda_i}))$，則$\alpha_i=\frac{1}{L_i(0)}$。

令$\beta_i=Pr($第i個管制圖沒有發生警訊$|Z_{i,t}\sim N(\delta_i,\frac{\lambda_i}{2-\lambda_i}))$，則$1-\beta_i=\frac{1}{L_i'(0)}$，即$\beta_i=1-\frac{1}{L_i'(0)}$。

附錄三 D的計算

AC_1和AC_2二個非機遇因素在時間h內發生的情形有二種順序，茲將二種可能情形及其對應之機率列述如后：

1. AC_1比AC_2先發生

$$P\ (V_1<V_2|V_1<h,\ V_2<h) = \int_0^h\int_0^{v_2} r_1e^{-r_1v_1}r_2e^{-r_2v_2}dv_1dv_2$$

$$= \frac{\frac{r_1}{r_1+r_2} - e^{-r_2 h} + \frac{r_2}{r_1+r_2} e^{-(r_1+r_2)h}}{(1-e^{-r_1 h})(1-e^{-r_2 h})} \text{。}$$

2. AC_2 比 AC_1 先發生

$$\begin{aligned} P\ &(V_2 < V_1 | V_1 < h,\ V_2 < h) \\ &= \int_0^h \int_0^{v_1} r_1 e^{-r_1 v_1} r_2 e^{-r_2 v_2} dv_2 dv_1 \\ &= \frac{\frac{r_2}{r_1+r_2} - e^{-r_1 h} + \frac{r_1}{r_1+r_2} e^{-(r_1+r_2)h}}{(1-e^{-r_1 h})(1-e^{-r_2 h})} \text{。} \end{aligned}$$

所以，若 AC_1 和 AC_2 皆在時間 h 內發生，令 D 表在該情形下自第一個非機遇因素發生後至第二個非機遇因素發生前這段時間內平均製程成本。

$$\begin{aligned} D &= c_1 \times P(V_1 < V_2 | V_1 < h,\ V_2 < h) + c_2 \times P(V_2 < V_1 | V_1 < h,\ V_2 < h) \\ &= \frac{\frac{r_1 c_1 + r_2 c_2}{r_1+r_2} - (c_1 e^{-r_2 h} + c_2 e^{-r_1 h}) + \frac{r_2 c_1 + r_1 c_2}{r_1+r_2} e^{-(r_1+r_2)h}}{(1-e^{-r_1 h})(1-e^{-r_2 h})} \text{。} \end{aligned}$$

參考文獻

楊素芬，鄭明芳(1994)，兩個非機遇因素下S管制圖之經濟設計。國立政治大學學報，第69期，頁193-214。

Banerjee, P. and Rahim, M. (1987). The economic design of control charts: A renewal theory approach. *Engineering Optimization* **12**, 63-73.

Crowder, S. V. (1987a). A simple method for studying run-length distributions of exponentially weighted moving average charts. *Technometrics* **29**, 401-407.

Crowder, S. V. (1987b). Average run lengths of exponentially weighted moving average control charts. *Journal of Quality Technology* **19**, 161-164.

Doganaskoy, N., Schmee, J. and Vandeven, M. (1996). Process monitoring with multiple product grades. *Journal of Quality Technology* **28**, 346-355.

Duncan, A. (1956). The economic design of X chart used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association* **51**, 228-242.

Montgomery, D. C. (1996). *Introduction to Statistical Quality Control.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

Panagos, M. R., Heikes, R. G. and Montgomery, D. C. (1985). Economic design of $\bar{X}$ control charts for two manufacturing process models. *Naval Research Logistics Quarterly* **32**, 631-646.

Ross, S. M. (1993). *Introduction to Probability Models.* Academic, Press.

Shewhart, W. (1931). *Economic Control of Quality of Manufactured Product.* D. Van Nostrand Company, Inc.

[民國88年7月11日收稿，88年10月24日修訂。]

Economic process control for two product grades

Su-Fen Yang Tai-Her Liu
Department of Statistics
National Chengchi University

ABSTRACT

The optimal design of control chart by minimizing the net sum of all quality cost involved was first proposed by Duncan (1956). Since then, variations of Duncan's approach have appeared. Recently, the focus has been accompanied with the consideration of the production strategy that manufactures multiple product grades from one single production line to meet diverse demands of customers'. In this paper, we adopt renewal theory approach to develop a process cost model with two different product grades, and use optimization technique to determine the optimal design parameters of the two economic $EWMA$ control charts. The approach can be extended to monitor the process with multiple product grades. The construction and application of the proposed $EWMA$ control charts are illustrated through an example.

Key words and phrases: Assignable causes, control charts, different product grades, renewal theory.

AMS 1991 subject classifications: Primary 60K05; Secondary 65D15.