中國統計學報
第28卷第2期
七十九年九月
197-211頁

對照處理及試驗處理比較之最佳內置行與列之集區設計

丁兆平　　雷淑儀
國立政治大學統計研究所

摘　要

本文考慮在集區設計內置行與列(block designs with nested rows and columns)的模型時，求得同時以P組試驗組與一組對照組比較之A式最佳(A-optimal)設計。A式最佳設計當$P=7,\cdots,25$; $b=1,\cdots,50$之表錄詳列於後，某些特殊形式的設計亦將在例題中列舉。

關鍵詞：行-列設計，集區設計，Φ-最佳化，A-最佳化，D-最佳化，E 最佳化。

美國數學會分類索引：主要62K05，次要62K10。

1. 引言

假設現有$P+1$個處理(treatments)，分別標以$0,1,2,\cdots,P$。0表示對照處理；$1,\cdots,P$表試驗處理。實驗單位是以b個集區(block)爲主，然後

每個集區裡再分爲R列及C行，因此構成爲有b個$R\times C$塊之行列設計(row-column design)，且$P,R,C\geq 2$。令$Y_{i(jh,jk)}$爲處理$i(i=0,1,\cdots,P)$分配到第j個$(j=1,2,\cdots b)$集區中第h列$(h=1,2,\cdots,R)$及第k行$(k=1,2,\cdots,C)$，所得之觀察值。假定此模型爲沒有交互反應之可加線性模型：

$$Y_{i(jh,jk)}=\mu+\alpha_i+\tau_j+\rho_{jh}+\gamma_{jk}+\varepsilon_{i(jh,jk)}, \tag{1.1}$$

μ ：總體平均值，

α_i ：處理i之效果，$i=0,1,\cdots,P$，

τ_j ：集區j之效果，$j=1,2,\cdots,b$，

ρ_{jh} ：集區j中第h列之效果，$h=1,2,\cdots,R$，

γ_{jk} ：集區j中第k行之效果，$k=1,2,\cdots,C$，

及假定ε爲不相關之隨機變數，其平均值爲0且有相同之變異數σ^2。再加輔助條件：

$$\sum_{h=1}^{R}\rho_{jh}=\sum_{k=1}^{C}\gamma_{jk}=0,\quad j=1,2,\cdots,b$$

及

$$\sum_{i=1}^{P}\alpha_i=\sum_{j=1}^{b}\tau_j=0\text{ 。}$$

再進一步，設$N_R=((r_{ij_h}))$爲P個試驗處理在所有bR列之$P\times bR$事件矩陣(incidence matrix)且$N_c=((S_{ij_k}))$爲P個試驗處理在所有bC行之$P\times bC$事件矩陣。然後設

$$\delta=((\delta_{ij}))=N_R(I_b\otimes 1_R)=N_C(I_b\otimes 1_C)\,.$$

δ_{ij} ：處理i在第j個集區之出現次數，

1_n ：所有項均爲1之$n\times 1$向量，

I_n ：$n\times n$單位矩陣(identity matrix)，

$\otimes$ ：Kronecker 乘法符號。

最後令r_{ij_h}爲處理i在第j個集區中之第h列所出現的次數，S_{ij_k}爲處理i在第j個集區中之第k行所出現的次數，且令

$$r_i=\sum_{j=1}^{b}\sum_{h=1}^{R}r_{ij_h}=\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{C}S_{ij_k}=\sum_{j=1}^{b}\delta_{ij}$$

爲處理 i 在此實驗設計裡之總出現次數。

已知 P, b, R, C 之値，令 $NB(P, b, R, C)$ 爲所有可能在模型(1.1)下之內置行列集區設計之集合。若 $d \in NB(P, b, R, C)$，我們可求得 P 個對照—試驗處理 $(\alpha_0 - \alpha_1, \cdots, \alpha_0 - \alpha_P)'$ 之訊息矩陣(information matrix)。此矩陣爲一個 $P \times P$ 矩陣 $M = ((m_{ij}))$，

$$M = diag(r_1, \cdots, r_p) - \frac{1}{C} N_R N_R' - \frac{1}{R} N_c N_c' + \frac{1}{RC} \delta\delta',$$

其第 (i, j) 項爲

$$m_{ij} = \begin{cases} \sum_{m=1}^{b} (\delta_{im} - \frac{1}{C} \sum_{h=1}^{R} r_{im_h}^2 - \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{C} S_{im_k}^2 + \frac{1}{RC} \delta_{im}^2) & \text{若 } i = j, \\ \sum_{m=1}^{b} (-\frac{1}{C} \sum_{h=1}^{R} r_{im_h} r_{jm_h} - \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{C} S_{im_k} S_{jm_k} + \frac{1}{RC} \delta_{im} \delta_{jm}) & \text{若 } i \neq j, \end{cases}$$

$i, j = 1, \cdots, P$。

此篇論文主要目的是經由某一函數 Φ 來尋找所謂「最佳的」設計 d, $d \in NB(P, b, R, C)$。若 $\Phi(M(d))$ 值在所有 $NB(P, b, R, C)$ 設計中爲最小，則稱設計 d 爲 Φ 式最佳(Φ-optimal)。一些常見的 Φ 函數之例子如下：

$\Phi_0(M) = det(M^{-1})$ （所謂 D 式最佳(D-optimality)），

$\Phi_1(M) = tr(M^{-1})$ （所謂 A 式最佳(A-optimality)），

及

$\Phi_\infty(M) = M^{-1}$ 之最大特徵値（所謂 E 式最佳(E-optimality)）。

因爲 A 式最佳之設計會使 $\sum_{i=1}^{P} Var(\hat{\alpha}_o - \hat{\alpha}_i)$ 爲最小，其中 $\hat{\alpha}_o - \hat{\alpha}_i$ 爲 $\alpha_o - \alpha_i$ 之最佳線性不偏估試式(best linear unbiased estimator 簡寫作 BLUE)。本文的理論部分見於 Ting 及 Notz (1989b)，本文著重於尋找並建立 A 式最佳之設計。

2. 符號註釋及 A 式最佳內置行與列集區設計之條件

假定 $\Phi(M) = \sum_{i=1}^{P} f(\lambda_i)$, f 是定義在非負數集合上且在正數集合上爲連續之可能會發散之實數函數，其一階導數 $f' < 0$，二階導數 $f'' > 0$；其中 $\lambda_i, i = 1, \cdots P$，爲 M 之特徵值。

在繼續進行以下的討論之前，我們需要一些定理以及引理。

定理2.1 (Ting 與 Notz (1987))

若 $M=((m_{ij}))$ 爲一 $P\times P$ 正定矩陣(positive definite matrix)，$\lambda_1,\cdots,\lambda_P$ 爲其特徵值且 f 定義如上。令 $m_{i.}=\sum_{j=1}^{P}m_{ij}=M$ 之第 i 列和，$i=1,\cdots,P$，$m_{..}=\sum_{i=1}^{P}m_{i.}=\sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{P}m_{ij}=M$ 所有項之和。則

$$
\begin{aligned}
&(P-1)f\left(\frac{1}{P-1}\sum_{i=1}^{P}m_{ii}-\frac{m_{..}}{P(P-1)}\right)+f\left(\frac{m_{..}}{P}\right)\\
&\le\frac{P-1}{P}\sum_{i=1}^{P}f\left(\frac{P}{P-1}m_{ii}-\frac{2}{P-1}m_{i.}+\frac{m_{..}}{P(P-1)}\right)+f\left(\frac{m_{..}}{P}\right)\\
&\le\sum_{i=1}^{P}f(\lambda_i)\ \circ
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

引理2.2 (Ting 與 Notz (1987))

當 M 爲完全對稱(completely symmetric)時，亦即 $M=aI_p+bJ_p$, J_p 爲所有項均爲1之 $P\times P$ 矩陣且 I_P 爲 $P\times P$ 之單位矩陣時，不等式(2.1)成爲等式。

引理2.3 (Ting 與 Notz (1987))

若 $d^*\epsilon NB(P,b,R,C)$, $M(d^*)$ 爲完全對稱且 d^* 最小化

(i) $(P-1)f(\frac{1}{P-1}\sum_{i=1}^{P}m_{ii}-\frac{1}{P(P-1)}m_{..})+f(\frac{m_{..}}{P})$，或

(ii) $\frac{(P-1)}{P}\sum_{i=1}^{P}f(\frac{P}{P-1}m_{ii}-\frac{2}{P-1}m_{i.}+\frac{m_{..}}{P(P-1)})+f(\frac{m_{..}}{P})$，

則 d^* 爲所有 $NB(P,b,R,C)$ 中 Φ 式最佳之設計。

令 $N=\{n;0\le n\le RC-\frac{rc}{b},\ n=aR$ 或 aC, a 爲非負整數$\}$。

定義2.1 (Kiefer (1975))

若 $A,B\in N$, $A<B$，且無任何屬於 N 之整數介於 A 及 B 之間，則稱 $[A,\ B]$ 爲一基本區間(elementary interval)。

我們運用引理2.3產生本論文之主要定理2.4。定理2.4之證明非常複雜及冗長，有興趣的讀者請參閱Ting 與 Notz (1989b)之附錄。

定理2.4 (Ting 與 Notz (1989b))

若 $d \in NB(P, b, R, C)$, $M(d)$ 爲完全對稱，且滿足

(i) r_i 儘可能相同，亦即
$r_i = [\frac{bRC-r_0}{P}]$ 或 $[\frac{bRC-r_0}{P}]+1, i = 1, \cdots, P$;

(ii) a. 若 $\frac{bRC-r_0}{P} \notin N$，則 $\delta_{im}, i = 1, \cdots, P, m = 1, \cdots, b$，儘可能的不等，但仍均須在包含 $\frac{bRC-r_0}{Pb}$ 之基本區間內；
b. 若 $\frac{bRC-r_0}{pb} \in N$，則 $\delta_{im} = \frac{r_i}{b}, i = 1, \cdots, P, m = 1, \cdots, b$;

(iii) $\delta om \le \frac{RC}{2}, m = 1, \cdots, b$，且
a. 若 $\frac{r_0}{b} \notin N$，則 $\delta_{om}, m = 1, \cdots, b$，儘可能不等，但均須在包含 $\frac{r_0}{b}$ 之基本區間內；
b. 若 $\frac{r_0}{b} \in N$，則 $\delta_{om} = \frac{r_0}{b}, m = 1, \cdots, b$;

(iv) $r_{im_h} = [\frac{\delta_{im}}{R}]$ 或 $[\frac{\delta_{im}}{R}]+1, i = 1, 1, \cdots, p, m = 1, \cdots, b, h = 1, \cdots, R$;

(v) $s_{im_k} = [\frac{\delta_{im}}{C}]$ 或 $[\frac{\delta_{im}}{C}]+1, i = 1, \cdots, p, m = 1, \cdots b,$ 且 $k = 1, \cdots, C$;

(vi) $r_{om_h} = [\frac{\delta_{om}}{R}]$ 或 $[\frac{\delta_{om}}{R}]+1, m = 1, \cdots, b$，且 $h = 1, \cdots, R$;

(vii) $s_{om_k} = [\frac{\delta_{om}}{c}]$ 或 $[\frac{\delta_{om}}{C}]+1, m = 1, \cdots, b$，且 $k = 1, \cdots, C$;

(viii) r_0 爲介於 1 和 $bRC/2$ 間之整數，且當 $f(x) = 1/x$ 時最小化引理2.3 中之 (i) 式或(ii) 式，

則在 P, R, C 滿足 $P, R, C \ge 8; P = 7, R, C, \ge 10; P = 6, R, C \ge 17$ 情形下，d 爲所有 $NB(P, b, R, C)$ 中之 A 式最佳設計。

設計 d 如能最小化 $\alpha_0 - \alpha_i$ 之最佳線性不偏估計量之最大變異數，則稱 d 爲 MV 一最佳。我們可明顯地看出，如 d 爲 A 式最佳，且 d 所對應的 M 爲完全對稱時，d 亦同時是 MV 一最佳，於是我們可得下面之引理2.5 。

引理2.5　如果 $d \in NB(P, b, R, C)$，且是爲根據定理2.4 所求出之 A 式最佳，則 d 同時亦是 MV 一最佳。

3. 求最佳內置行與列集區設計之方法

由於內置行與列集區設計爲b個集區，每個集區又各自成爲一個行列設計，它的結構和行列設計非常類似，使我們聯想到是否可由重覆b個A式最佳行列設計，以產生A式最佳內置行與列集區設計？由Ting與Notz (1989b)中定理3.6可得知當設計$d \in NB(P,b,R,C), P=n^2, R=\alpha(n^2+n), C=\beta(n^2+n)$，且$n,\alpha,\beta$爲正整數時，設計$d$爲一個重覆$b$次之$\alpha(n^2+n)$列與$\beta(n^2+n)$行之行列設計，且

對照處理之總個數$r_0 = b\alpha\beta n^2(n+1)$；

試驗處理之總個數$r_i = b\alpha\beta n(n+1), i=1,\cdots,P$；

各個集區裡對照處理出現之個數

$$\delta_{om} = \alpha\beta n^2(n+1), m=1,\cdots,b;$$

各個集區裡試驗處理出現之個數

$$\delta_{im} = \alpha\beta n(n+1), i=i,\cdots P, m=1,\cdots b;$$

集區m裡對照處理在第h列出現之個數

$$r_{omh} = \beta n, b=1,\cdots,b, h=1,\cdots R;$$

集區m裡對照處理在第k行出現之個數

$$s_{omk} = \alpha n, m=1,\cdots,b, k=1,\cdots C;$$

集區m裡試驗處理i在第h列出現之個數

$$r_{imh} = \beta, i=1,\cdots P, m=1,\cdots,b, h=1,\cdots,R;$$

集區m裡試驗處理i在第k行出現之個數

$$\delta_{im_k} = \alpha, i=1,\cdots p, m=1,\cdots,b, k=1,\cdots,C,$$

則d爲在$NB(n^2,b,\alpha(n^2+n),\beta(n^2+n))$中之$A$式最佳內置行與列集區設計。Majumdar (1986) 已證明當$R=\alpha(n^2+n), C=\beta(n^2+n)$之行列設計，若每個試驗處理在每一列出現$\beta$次，在每一行出現$\alpha$次，而對照處理在每一列出現$\beta n$次，在每一行出現$\alpha n$次，是一個$A$式最佳行列設計。

因此在定理2.4中P,R,C範圍滿足$P,R,C \geq 8; P=7, R,C \geq 10; P=6, R,C \geq 17$情形下，毫無疑問地當$P=3^2,4^2,5^2,\cdots$時很容易建立$A$式最佳內置行與列集區設計，但在$6 \leq P \leq 8, 10 \leq P \leq 15$及$17 \leq P \leq 24$間（即在$9,16,25\cdots$等之間）如何建立？我們提供一個較簡便且較迅速的步驟如下：

步驟1. 根據定理2.4，以電腦找出最好之r_0。

步驟2.

(i) 當$R=C=P+x, x=3,4,5$，且經由步驟1所求出之$r_0=xbR$時，A

式最佳內置行與列集區設計是由重覆b個$R\times R$之拉丁方格(Latin square)，其中處理標記$(P+1)$到R以0代替（本文以$LS(R;P)$表示）所構成。

例1. $P=7$, $b=1,\cdots,50$, $R=C=10$, $r_0=30b$, $r_i=10b$, $i=1,\cdots,7$, $\delta_{om}=30$, $r_{om_h}=s_{om_k}=3$, $m=1,\cdots,b$, $h,k=1,\cdots,10$, $\delta_{im}=10$, $r_{im_h}=s_{im_k}=1$, $i=1,\cdots,7$, $m=1,\cdots b$, $h,k=1,\cdots 10$, 重覆下列$LS(10;7)$ b次即可得$NB(7,b,10,10)$中之A式最佳。

1	2	3	4	5	6	7	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	0	0
0	0	1	2	3	4	5	6	7	0
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7
7	0	0	0	1	2	3	4	5	6
6	7	0	0	0	1	2	3	4	5
5	6	7	0	0	0	1	2	3	4
4	5	6	7	0	0	0	1	2	3
3	4	5	6	7	0	0	0	1	2
2	3	4	5	6	7	0	0	0	1

左爲LS(10;7)

(ii) 當$R=C-1, C=P+x, x=3,4,5$，且經由步驟1所求得之$r_0=xbR$時，A式最佳內置行與列集區設計是由重覆b個$R\times C$之Youden方格(Youden square)，其中處理標記$(P+1)$到C以O代替（本文以$YS(R,C;P)$表示）所構成。

例2. $P=9$, $b=1,\cdots,50$, $R=11$, $C=12$, $r_0=33b$, $r_i=11b$, $i=1,\cdots 9$, $\delta_{om}=33$, $r_{om_h}=3$, $s_{om_k}=2$（有3行）或3（有9行），$m=1,\cdots,b$, $h=1,\cdots,11$, $k=1,\cdots,12$, $\delta_{im}=11$, $r_{im_h}=1$, $s_{im_k}=1$（有11行）或0（有1行），$i=1,\cdots,9$, $m=1,\cdots,b$, $h=1,\cdots,11$, $k=1,\cdots,12$, 重覆下列$YS(11,12;9)b$次即可得$NB(9,b,11,12)$中之A式最佳。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0'	0
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	0	0	0	1	2	3	4	5	7	7	8
8	9	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	0	0	0	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	0	0	0	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	0	0	0	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	0	0	0	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	0	0	0	1	2

左爲YS(11, 12; 9)

(iii) 當 $R = C+1, C = P+x, x = 3,4,5$ ，且經由步驟1所求得之 $r_0 = xbR$ 時，A 式最佳內置行與列集區設計是由重覆 b 個 $R \times C$ 之一般Youden設計(generalized Youden design)，其中處理標記 $(P+1)$ 到 C 以 O 代替（本文以GYD (R, C; P) 表示）所構成。

例3. $P = 8,\ b = 1,\cdots,50,\ R = 12,\ C = 11,\ r_0 = 36b,\ r_i = 12b,\ i = 1,\cdots,8,\ \delta_{om} = 36,\ r_{om_h} = 3,\ s_{om_k} = 3$（有8行）或4（有3行），$m = 1,\cdots,b, h = 1,\cdots,12, k = 1,\cdots 11,\ \delta_{im} = 12,\ r_{im_h} = 1,\ s_{im_k} = 1$（有10行）或2（有1行），$i = 1,\cdots,8,\ m = 1,\cdots,b,\ h = 1,\cdots,12,\ k = 1,\cdots,11,$ 重覆下列GYD (12, 11; 8) b 次即可得 $NB(8,b,12,11)$ 中之 A 式最佳。

1	2	3	4	5	6	7	8	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	0
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7
7	8	0	0	0	1	2	3	4	5	6
6	7	8	0	0	0	1	2	3	4	5
5	6	7	8	0	0	0	1	2	3	4
4	5	6	7	8	0	0	0	1	2	3
3	4	5	6	7	8	0	0	0	1	2
2	3	4	5	6	7	8	0	0	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	0	0	0

左爲GYD(12, 11;8)

(iv) 當其他一般例子時，亦可經由步驟1及類似步驟2之(i)、(ii)或(iii)之方法求得 A 式最佳內置行與列集區設計是由重覆 b 個 $R \times C$ 之Youden方

格$YS(R,C;P,t)$，其中處理標記$xP+y$, $x=1,\cdots,t-1$, $y=1,\cdots,P$，改爲y；處理標記$tp+1,\cdots,C$以O代替，所構成；或由重覆b個$R\times R$之拉丁方格$LS(R;P,t)$，其中處理標記$xP+y$, $x=1,\cdots,t-1$, $y=1,\cdots,P$，改爲y；處理標記$tP+1,\cdots,R$以O代替，所構成。

例4. $p=7$, $b=1,\cdots,14$, $R=18$, $c=19$, $r_0=90b$, $r_i=36b$, $i=1,\cdots,7$, $\delta_{om}=90$, $r_{om_h}=5$, $s_{om_k}=4$（有5行）或5（有14行），$m=1,\cdots,b$, $h=1,\cdots,18$, $k=1,\cdots,19$, $\delta_{im}=3b$, $r_{im_h}=2$, $s_{im_k}=1$（有2行）2（有17行），$i=1,\cdots,7$, $m=1,\cdots,b$, $h=1,\cdots,18$, $k=1,\cdots,19$, 重覆下列$YS(18,19;7,2)$ b次即可得$NB(7,b,18,19)$中之A式最佳。

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0
0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0
0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0
0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6
6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1
1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2

上爲YS(18, 19; 7, 2)。

例5. $P=7$, $b=1,\cdots,50$, $R=C=19$, $r_0=95b$, $r_i=38b$, $i=1,\cdots,7$, $\delta_{om}=95$, $r_{om_h}=s_{om_k}=5$, $m=1,\cdots,b$, $h,k=1,\cdots,19$, $\delta_{im}=38$, $r_{im_h}=s_{im_k}=2$, $i=1,\cdots,7$, $m=1,\cdots,b$, $h,k=1,\cdots,19$. 重覆下列$LS(19;7,2)$ b次即可得$NB(7,b,19,19)$中之A式最佳。

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0
0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0
0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0
0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6
6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	1
1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1	2
2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	0	0	1

上爲 $LS(19;7,2)$ 。

(v) **其他特例：**

例6. $P=8,\ b=8,\ R=C=9,\ r_0=144,\ r_i=63,\ i=1,\cdots,8,\ \delta_{om}=18,\ r_{om_h}=s_{om_k}=2,\ m=1,\cdots,8,\ h,k=1,\cdots,9,\ \delta_{im}=9$ （有7個集區）或0（有1個集區），$r_{im_h}=s_{im_k}=1$ 當（$\delta_{im}=9$ 時），$m=1,\cdots,8,\ h,k=1,\cdots 9,$ 若各集區 δ_{om} 、δ_{im} 之個數分配如下表：

集　區	1	2	3	4	5	6	7	8
δ_{0m}	18	18	18	18	18	18	18	18
δ_{1m}	9	9	9	9	9	9	9	0
δ_{2m}	9	9	9	9	9	9	0	9
δ_{3m}	9	9	9	9	9	0	9	9
δ_{4m}	9	9	9	9	0	9	9	9
δ_{5m}	9	9	9	0	9	9	9	9
δ_{6m}	9	9	0	9	9	9	9	9
δ_{7m}	9	0	9	9	9	9	9	9
δ_{8m}	0	9	9	9	9	9	9	9

則各集區如下即可得 $NB(8,8,9,9)$ 中之 A 式最佳。

集區1

1	2	3	4	5	6	7	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	0
0	0	1	2	3	4	5	6	7
7	0	0	1	2	3	4	5	6
6	7	0	0	1	2	3	4	5
5	6	7	0	0	1	2	3	4
4	5	6	7	0	0	1	2	3
3	4	5	6	7	0	0	1	2
2	3	4	5	6	7	0	0	1

集區2

1	2	3	4	5	6	0	8	0
0	1	2	3	4	5	6	0	8
8	0	1	2	3	4	5	6	0
0	8	0	1	2	3	4	5	6
6	0	8	0	1	2	3	4	5
5	6	0	8	0	1	2	3	4
4	5	6	0	8	0	1	2	3
3	4	5	6	0	8	0	1	2
2	3	4	5	6	0	8	0	1

集區3

1	2	3	4	5	0	7	8	0
0	1	2	3	4	5	0	7	8
8	0	1	2	3	4	5	0	7
7	8	0	1	2	3	4	5	0
0	7	8	0	1	2	3	4	5
5	0	7	8	0	1	2	3	4
4	5	0	7	8	0	1	2	3
3	4	5	0	7	8	0	1	2
2	3	4	5	0	7	8	0	1

集區4

1	2	3	4	0	6	7	8	0
0	1	2	3	4	0	6	7	8
8	0	1	2	3	4	0	6	7
7	8	0	1	2	3	4	0	6
6	7	8	0	1	2	3	4	0
0	6	7	8	0	1	2	3	4
4	0	6	7	8	0	1	2	3
3	4	0	6	7	8	0	1	2
2	3	4	0	6	7	8	0	1

集區5

1	2	3	0	5	6	7	8	0
0	1	2	3	0	5	6	7	8
8	0	1	2	3	0	5	6	7
7	8	0	1	2	3	0	5	6
6	7	8	0	1	2	3	0	5
5	6	7	8	0	1	2	3	0
0	5	6	7	8	0	1	2	3
3	0	5	6	7	8	0	1	2
2	3	0	5	6	7	8	0	1

集區6

1	2	0	4	5	6	7	8	0
0	1	2	0	4	5	6	7	8
8	0	1	2	0	4	5	6	7
7	8	0	1	2	0	4	5	6
6	7	8	0	1	2	0	4	5
5	6	7	8	0	1	2	0	4
4	5	6	7	8	0	1	2	0
0	4	5	6	7	8	0	1	2
2	0	4	5	6	7	8	0	1

集區7

1	0	3	4	5	6	7	8	0
0	1	0	3	4	5	6	7	8
8	0	1	0	3	4	5	6	7
7	8	0	1	0	3	4	5	6
6	7	8	0	1	0	3	4	5
5	6	7	8	0	1	0	3	4
4	5	6	7	8	0	1	0	3
3	4	5	6	7	8	0	1	0
2	3	4	5	6	7	8	0	1

集區8

0	2	3	4	5	6	7	8	0
0	0	2	3	4	5	6	7	8
8	0	0	2	3	4	5	6	7
7	8	0	0	2	3	4	5	6
6	7	8	0	0	2	3	4	5
5	6	7	8	0	0	2	3	4
4	5	6	7	8	0	0	2	3
3	1	5	6	7	8	0	0	2
2	3	4	5	6	7	8	0	0

例7. 當 $P=7$, $b=1,\cdots,11$, $R=10$, $C=11$, $r_0=33b$, $r_i=11b$, $i=1,\cdots,7$, $\delta_{om}=33$, $r_{om_h}=3$ （有7列）或4 （有3列），$s_{om_k}=3$, $m=1,\cdots,b$, $h=1,\cdots,10$, $k=1,\cdots 11$, $\delta_{im}=1$, $r_{im_h}=1$ （有9列）或2 （有1列），$s_{im_k}=1$, $i=1,\cdots,7$, $m=1,\cdots,b$, $h=1,\cdots,10$, $k=1,\cdots,11$, 重覆下列將行與列對調之 $GYD(11,10;7)b$ 次即可得 $NB(7,b,10,11)$ 中之 A 式最佳。

1	2	3	4	5	6	7	0	0	0	1
2	3	4	5	6	7	0	0	0	1	2
3	4	5	6	7	0	0	0	1	2	3
4	5	6	7	0	0	0	1	2	3	4
5	6	7	0	0	0	1	2	3	4	5
6	7	0	0	0	1	2	3	4	5	6
7	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	0
0	0	1	2	3	4	5	6	7	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	0	0	0

但當 $P=7$, $b=1,\cdots,50$, $R=10$, $C=11a$, $a=3,5,6$ 或 $b=1,\cdots,48$, $R=10$, $C=11a$, $a=2$ 時，$r_0=33ab$, $r_i=11ab$, $i=1,\cdots 7$，似乎可以重覆 ab 個將行與列對調之 $GYD(11,10;7)$ 。此時所得之 M 雖為完王對稱矩陣，但並不符合定理2.4之條件；與由定理2.4之8種條件，根據相同的 r_0 值，所得之設計，兩相比較它們的 f 值，即引理2.3之(i)式，其值在 $a=2$ 時各為0.21388888888及0.21281226194，亦即效率(efficiency)為0.9950。也就是當 A 式最佳內置行與列集區設計較難或無法建立時，我們可使用類似此法求得近似 A 式最佳之設計。

4. 最佳A式內置行與列集區設計表

$1 < b < 50$

P	b	R	C	r_u	r_c	型式
7	b	10	10a	3abR	abR	重覆 ab 個 $LS(10;7)$*1
			$a=1,\cdots,b$			
	$1,\cdots,11$	11	10	3bR	bR	重覆 b 個 $GYD(11,10;7)$*3
	$1,\cdots,14$	18	19	5bR	2bR	重覆 b 個 $YS(18,19;7,2)$*3
	b	19	19	5bR	2bR	重覆 b 個 $LS(19;7,2)$
8	b	11	11a	3abR	abR	重覆 ab 個 $LS(11;8)$
			$a=1,\cdots,10$			
	$1,\cdots,21$	10	11	3bR	bR	重覆 b 個 $YS(10,11;8)$*2
	$22,\cdots,50$	10	11	3(b-1)R +2C	(b-1)R+C	重覆 b-1 個 $YS(10,11;8)$
	b	12	11	3bR	bR	重覆 b 個 $GYD(11,10;8)$
	8	9	9	144	63	見例6
9	b	12	12a	3abR	abR	重覆 ab 個 $LS(12;9)$
			$a=1,\cdots,b$			
	b	11	12	3bR	bR	重覆 b 個 $YS(11,12;9)$
	b	13	12	3bR	bR	重覆 b 個 $GYD(13,12;9)$
10	b	13	13a	3abR	abR	重覆 ab 個 $LS(13;10)$
			$a=1,\cdots,b$			
	10a a=1, 2, 3	12	12	3bR	(b-a)R	同例6
10	5	12	12	180	54	見例7
	b	12	13	3bR	bR	重覆 b 個 YS(12,13;10)
	b	14	13	3bR	bR	重覆 b 個 GYD(14,13;10)
11	b	14	14	3bR	bR	重覆 b 個 LS(14;11)
12	$1,\cdots,4$	15	15	3bR	bR	重覆 b 個 LS(15;12)
13	b	17	17	4bR	bR	重覆 b 個 LS(17;13)
14	b	18	18	4bR	bR	重覆 b 個 LS(18;14)
	$1,\cdots,7$	19	18	4bR	bR	重覆 b 個 GYD(19,18;14)
15	b	19	19	4bR	bR	重覆 b 個 LS(19;15)
	b	18	19	4bR	bR	重覆 b 個 YS(18,19;15)
	b	20	19	4bR	bR	重覆 b 個 GYD(20,19;15)
16	b	20	20	4bR	bR	重覆 b 個 LS(20;16)
	b	19	20	4bR	bR	重覆 b 個 YS(19,20;16)
	b	21	20	4bR	bR	重覆 b 個 GYD(21,20;16)
17	b	21	21	4bR	bR	重覆 b 個 LS(21;17)
	b	20	21	4bR	bR	重覆 b 個 YS(20,21;17)
	b	22	21	4bR	bR	重覆 b 個 GYD(22,21;17)
18	b	22	22	4bR	bR	重覆 b 個 LS(22;18)
19	$1,\cdots,8$	23	23	4bR	bR	重覆 b 個 LS(23;19)
21	$1,\cdots,4$	26	26	5bR	bR	重覆 b 個 LS(26;21)
22	b	27	27	5bR	bR	重覆 b 個 LS(27;22)
23	b	28	28	5bR	bR	重覆 b 個 LS(28;23)
	$1,\cdots,7$	29	28	5bR	bR	重覆 b 個 GYD(29,28;23)
24	b	29	29	5bR	bR	重覆 b 個 LS(29;24)
	b	28	29	5bR	bR	重覆 b 個 YS(28,29;24)
	b	30	29	5bR	bR	重覆 b 個 GYD(30,29;24)
25	b	30	30	5bR	bR	重覆 b 個 LS(30;25)
	b	29	30	5bR	bR	重覆 b 個 YS(29,30;25)
	b	31	30	5bR	bR	重覆 b 個 GYD(31,30;25)

*1 $LS(a;P)$：為一個 $a\times a$ 之拉丁方格，其中處理標記 $(P+1),(P+2),\cdots,a$ 改為 0 表示。

*2 $YS(a_1,a_2;P)$：為一個 $a_1,\times a_2$ 之 Youden 方格，其中處理標記 $(P+1),(P+2),\cdots,a_2$ 改為 0 表示。

*3 $GYD(a_1,a_2;P)$ 為一個 $a_1\times a_2$ 之一般 Youden 設計，其中處理標記 $(P+1),(P+2),\cdots,a_2$ 改為 0 表示。

*4 $YS(a_1,a_2;P,t)$：為一個 $a_1\times a_2$ 之 Youden 方格，其中處理標記 $xp+y, x=1,\cdots,t-1, y=1,\cdots,P$，改為 y；處理標記 $tP+1,\cdots,a_2$ 改為 0 表示。

*5 $LS(a;P,t)$：為一個 $a\times a$ 之拉丁方格，其中處理標記 $sP+y, x=1,\cdots,t-1, y=1,\cdots,p$，改為 y；處理標記 $tP+1,\cdots,a$ 改為 0 表示。

參考文獻

Kiefer, J.(1975). Construction and optimality of generalized Youden designs. A Survey of Statistical Design and Linear Models (J. Strivastava ed.), North Holland, New York, 333-53.

Majumdar, D. (1986). Optimal designs for comparisons between two sets of treatments. J. Statist. Plan. and Inf., 14, 359-72.

Notz, W. (1985). Optimal designs for treatment-control comparisons in the presences of two-way heterogeneity. J. Statist. Plan. and Inf. 12, 61-73.

Ting, C. P. and Notz, W. (1987). Optimal row-column designs for treatment-control comparisons. Technical Report No. 373, The Ohio State University.

Ting, C. P. and Notz, W. (1989a). Optimal row-column designs and block designs for treatment-control comparisons. (Submitted for publication)

Ting, C. P. and Notz, W. (1989b). Optimal block designs with nested rows and columns for control-test treatment comparisons. Technical Report, National Chengchi University.

[民國78年12月25日收稿，79年2月8日修定]

Optimal block designs with nested rows and columns for control–test treatment comparisons

Chao–Ping Ting and Sue–Yi Lei

National Chengchi University

ABSTRACT

A optimal designs for comparing P test treatments simultaneously with a control in the setting of block design (b blocks) with nested rows (R rows) and columns (C columns) are considered. A catalog of A–optimal designs are given when the parameters are in the range $P = 7, \cdots, 25$; $b = 1, \cdots 50$. Some interesting discoveries are put into examples.

Key words and pharses. A optimality, block designs, D–optimality, E–optimality, row–column designs, ϕ optimality.

AMS 1980 subject classifications. Primary 62K05; secondary 62K10.