中國統計學報
第34卷第4期
八十五年十二月
408 429頁

有空點存在之情形下行列設計最適性之探討

丁兆平　吳昕

國立政治大學統計系

摘　要

行列設計中存在有空點的情形時,欲做全域最適行列設計的配置將會變得複雜許多,所以在本文中我們證明出將全域最適行列設計做橫向或縱向複製後,所得之設計不論其試驗處理在行或列出現之次數爲"平衡"或"不平衡",均依舊爲全域最適行列設計。此外,將若干個試驗處理個數相同之全域最適行列設計做橫向或縱向的合併,所形成的新設計亦爲全域最適行列設計,因此許多不同空點型式的行列設計之最適性便可證實。最後,根據實例說明若一行列設計橫向複製爲全域最適行列設計,但縱向複製不爲全域最適設計時,在何種情況下,採直接縱向複製所得之行列設計,仍能相近於全域最適行列設計。

關鍵詞: 集區設計,平衡不完全集區設計,平衡集區設計,平衡不等集區設計,廣義二項設計,行列設計,全域最適設計。

美國數學會分類索引: 主要62K10; 次要62K05, 05B05。

1. 前言

在農業、工業或醫藥生物界的實驗中，為了降低實驗中不必要的干擾因素所引起的實驗誤差，以增加試驗處理比較時的準確性，採用集區設計(block designs)已成為實驗者經常使用的設計方法之一。但往往試驗中只具有單一集區分類是不夠的，例如：在生物試驗中比較四種細菌的生長速率時，為避免因培養皿的環境不同所導致的實驗誤差，所以將環境因素中的溫度和濕度視為集區。其中行向分類代表不同的溫度水準，列向分類代表不同的濕度水準。此種二維度的集區分類設計稱之為行列設計(row-column designs)。

但是現實情況下，在行列設計中可能有某些行與列的組合是不可能或是不需要，不必要做實驗的。例如，在比較A、B、C、D四種催化劑對提高化學反應速率效果的例子中，行與列所代表的分別是不同的溫度及壓力水準，但其中催化劑A可能根本不適合在某種溫度和壓力水準下做促進某二種化學藥品混合的觸媒，因為此種組合可能會產生實驗的危險性。又例如，在前例的生物試驗中，某種溫度和濕度的環境下，會造成培養皿中的細菌全數死亡，所以不存在任何觀察值。因此在行列設計的結構中，便存在了一些空點(empty nodes)。諸如以上的例子可知，設計中存在有空點的情形甚為普遍，而且空點所代表的意義和遺漏數據(missing data)的情形是完全不同的。以往處理遺漏數據的方法之一，是對該值加以估計；可是應用在處理空點時，我們認為此法並不恰當，因為該值根本不存在，所以在本文中我們並不對空點做任何估計。

由於實驗資源有限，在行列設計中具有空點時，我們希望透過對試驗處理(test treatment)的適當配置，以致能從實驗中獲得最大的資訊(maximum information)，亦即是所設計出來的實驗能使得處理效果(treatment effect)得到一個最有效的估計，且該設計達到某種最適準則(optimality criterion)。但行列設計存在有空點時，欲使設計符合最適性，則試驗處理的配置會變得複雜許多，故相關的論文十分有限，如Hedayat and Raghavarao (1975), Ray (1986), Stewart and Bradley (1991), Jacroux and Ray (1991)、和Shah and Sinha (1993)。

以上之論文不論空點之位置具有某種規則性，或是呈現某種圖案形狀，全域最適行列設計均需滿足試驗處理在各行和各列中出現之次數要完全相等或是儘可能的相等，且將行和列視為集區時，所對應之集區設計必須具有全域

最適性(參閱定義2.2後之定義),亦即必須爲一平衡不完全集區設計(balanced incomplete block design, BIBD),平衡集區設計(balanced block design, BBD),或是平衡不等集區設計(balanced unequal block design, BUBD)。

然而Kunert (1993)所提出在$b_1 = v, b_2 = zv(v-1), k_1 = z(v-1)^2, k_2 = v-1$(其中$b_1$爲列個數,$b_2$爲行個數,$k_1$爲列大小,$k_2$爲行大小,$v$爲試驗處理個數,$z \in N$)條件下之全域最適設計的例子則非如此。在該例中,若將行視爲集區時爲一BIBD;但將列視爲集區時,試驗處裡在列中出現之次數並非盡可能的相等,故不可能成爲一BIBD,或是BBD;然而該設計依舊具全域最適性。

由於Kunert (1993)所提出的例子是限制在$b_1 = v, b_2 = zv(v-1), k_1 = z(v-1)^2, k_2 = v-1$條件下,且空點出現在各列的次數爲$z(v-1)$,出現在各行的次數爲1,且在每行中皆有一列是和其不相容的。在其實例中指出若將該設計橫向複製z倍時,所得之設計爲在$b_1 = v, b_2 = zv(v-1), k_1 = z(v-1)^2, k_2 = v-1$之全域最適行列設計。然而在複製前之全域最適行列設計,視行爲集區時爲一BIBD;而視列爲集區時,爲試驗處理在每列出現之次數是a或$a+1$之BBD。將該設計橫向複製z倍之後,由行來看仍爲BIBD,但若由列來看,試驗處理在每列出現之次數是za或$z(a+1)$,並不具任何最適性。故Kunert (1993)的"反例"粉碎了最適行列設計均須滿足試驗處理要"平衡"的出現在行和列中之猜測。但若當b_1, b_2, k_1, k_2和v不具上述之關係,且空點位置亦不如上述情形時,同樣的結論是否依然得以驗證呢?

再者,更進一步,我們猜測將若干個試驗處理個數相同之全域最適行列設計,做橫向或縱向的合併,所形成之新設計是否亦爲全域最適行列設計?若確實如此,則許多不同空點型式的行列設計之最適性便可證實。

本文架構如後:第二節爲符號說明以及列出本文所需之定義與定理;主要定理,亦即上述兩項猜測之證實,將在第三節中給出。至於若一行列設計橫向複製爲全域最適行列設計,但縱向複製則非時,我們若依舊將其直接縱向複製,或將複製後的部份做試驗處理的重新命名(rename),所得之行列設計之效率(efficiency)是否夠高?嘗試此種作法的主要因素,是由於全域最適行列設計之配置並不容易找到,尤其當行列個數較大時,更顯困難。因此在最後一節中,我們嘗試針對多個具有不同空點位置,行列個數,以及行列大小的組合,以實例說明在何種情況下,採直接縱向複製或複製後對試驗處理重新命名,所得之

行列設計仍能相近於全域最適行列設計。

2. 符號說明及本文所需之定義與定理

本文所使用之符號說明如下:

(a) $D(v,\ b_1,\ b_2,\ K_1,\ K_2)$ 表示具有 v 個試驗處理, b_1 個列, b_2 個行, 以及列大小 (row size) 為 K_1, 行大小 (column size) 為 K_2 之所有行列設計的集合, 其中 $K_1 = diag(k_{11},\ldots,k_{1b_1})$, k_{1j} 表第 j 列之大小; $K_2 = diag(k_{21},\ldots,k_{2b_2})$, k_{2h} 表第 h 行之大小。

(b) $B(v,b,K)$ 表示具有 v 個試驗處理, b 個大小為 K 之集區設計的集合, 其中 $K = diag(k_1,\ldots,k_b)$, k_j 表第 j 個集區之大小。若 $d \in D(v,b_1,b_2,K_1,K_2)$, 則當 $\tilde{d}_1 \in B(v,b_1,K_1)$ ($\tilde{d}_2 \in B(v,b_2,K_2)$) 表示將列(行)視為集區時 d 所對應的集區設計。

(c) C_d 表示估計試驗處理效果的 C-矩陣 (C-matrix)。

(i) 若 $d \in B(v,b,K)$, 則

$$C_d = diag(r_{d1}, r_{d2},\ldots,r_{dv}) - N_d K^{-1} N_d', \tag{2.1}$$

其中 $r_{di} = \sum_{j=1}^{b} n_{dij}$, $N_d = [n_{dij}]_{v\times b}$, n_{dij} 表示試驗處理 i 出現在第 j 個集區的次數。

(ii) 若 $d \in D(v,b_1,b_2,K_1,K_2)$, 則

$$C_d = C_{\tilde{d}1} - N_{d2(1)} K_{d2(1)}^{-} N_{d2(1)}',$$

或

$$C_d = C_{\tilde{d}2} - N_{d1(2)} K_{d1(2)}^{-} N_{d1(2)}', \tag{2.2}$$

其中

$$\begin{aligned} C_{\tilde{d}1} &= diag(r_{d1},\ldots,r_{dv}) - N_{\tilde{d}1} K_1^{-1} N_{\tilde{d}1}', \\ N_{d2(1)} &= N_{\tilde{d}2} - N_{\tilde{d}1} K_1^{-1} M_{d12}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$
\begin{aligned}
&K_{d2(1)} = K_2 - M_{d21}K_1^{-1}M_{d12},\\
&C_{\tilde{d}2} = diag(r_{d1},\ldots,r_{dv}) - N_{\tilde{d}2}K_2^{-1}N'_{\tilde{d}2},\\
&N_{d1(2)} = N_{\tilde{d}1} - N_{\tilde{d}2}K_2^{-1}M_{d21},\\
&K_{d1(2)} = K_1 - M_{d12}K_2^{-1}M_{d21},\\
&N_{\tilde{d}1} = [n_{dij.}]_{v\times b_1},\ N_{\tilde{d}2} = [n_{di.h}]_{v\times b_2},\\
&M_{d12} = [n_{d.jh}]_{b_1\times b_2},\ M_{d21} = M'_{d12},\\
&K^-_{d2(1)} = K_{d2(1)}\text{ 之 g- 反矩陣 (g-inverse)},\\
&n_{dijh} = \text{試驗處理 } i \text{ 在第 } j \text{ 列第 } h \text{ 行出現之次數},\\
&n_{dij.} = \sum_{h=1}^{b_2} n_{dijh} = \text{試驗處理 } i \text{ 在第 } j \text{ 列出現的次數},\\
&n_{di.h} = \sum_{j=1}^{b_1} n_{dijh} = \text{試驗處理 } i \text{ 在第 } h \text{ 行出現的次數},\\
&n_{d.jh} = \sum_{i=1}^{v} n_{dijh} = \text{第 } j \text{ 列第 } h \text{ 行之觀測值總個數},\\
&r_{di} = \sum_{j=1}^{b_1}\sum_{h=1}^{b_2} n_{dijh}\text{ 。}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

以下敘述本文所需之定義及定理。

定義2.1: 集區設計 $d \in B(v,b,K)$, 若滿足下列條件, 則稱之爲BUBD:

(1) $\bar{k}C_d = (\bar{r}-\bar{\lambda})I_v + \bar{\lambda}J_v$,

(2) $n_{dij} = [k_j/v]$ 或 $[k_j/v]+1$, $\forall\, i,j$,

其中 $\bar{k} = \prod_{j=1}^{b} k_j$, I_v 表 $v\times v$ 的單位矩陣, 而 J_v 表所有元素皆爲1的 $v\times v$ 矩陣, 而 $\bar{r}$ 和 $\bar{\lambda}$ 爲大於0之實數。

由上述定義可得, 若 $k_j = k$, $\forall\, j$, 且 $k \ge v$ 時, 則 d 爲BBD; 若 $k < v$, 則 d 爲BIBD。

定義2.2: 行列設計 $d \in D(v,b_1,b_2,K_1,K_2)$, 若具有下列條件, 則稱之爲廣義二項設計(generalized binary design):

(1) $n_{dij.} = [k_{1j}/v]$ 或 $[k_{1j}/v]+1$, $\forall\, i,j$,

(2) $n_{di.h} = [k_{2h}/v]$ 或 $[k_{2h}/v] + 1$, $\forall\, i, h$ 。

本文所採取之全域最適設計之定義是根據Kiefer (1975) 所提出:設計 d_0,若滿足下列兩個條件時,則為全域最適設計:

(1) $C_{d_0} = aI + bJ$,即 C_{d_0} 呈完全對稱(completely symmetric),

(2) $tr(C_{d_0}) = \max_{d \in D(v,b_1,b_2,K_1,K_2)} tr(C_d)$ 。

上述定義 2.1 中之BUBD, BBD,以及BIBD均已被證實為全域最適集區設計。

所以針對行列設計討論時,由於 $C_d \leq C_{\tilde{d}1}$ ($C_{\tilde{d}2}$),且由(2.2)式之 C_d 中可看出,若 $N_{d2(1)} = O_{v\times b_2}$ ($N_{d1(2)} = O_{v\times b_1}$),其中 $O_{a\times b}$ 表 $a \times b$ 之零矩陣,則 $C_d = C_{\tilde{d}1}$ ($C_{\tilde{d}2}$),亦即行列設計之 C- 矩陣和其所對應的集區設計之 C- 矩陣相同,因此可得到下列的定理。

<u>**定理2.1:**</u>若 $d \in D(v, b_1, b_2, K_1, K_2)$,且滿足下列條件,則 d 為 $D(v, b_1, b_2, K_1, K_2)$ 中的全域最適行列設計:

(1) $N_{d2(1)} = N_{\tilde{d}2} - N_{\tilde{d}1}K_1^{-1}M_{d12} = O_{v\times b_2}$,

(2) $C_{\tilde{d}1} = aI_v + bJ_v$,且 $\tilde{d}_1$ 為 $B(v, b_1, K_1)$ 中之全域最適集區設計,

或

(1) $N_{d1(2)} = N_{\tilde{d}1} - N_{\tilde{d}2}K_2^{-1}M_{d21} = O_{v\times b_1}$,

(2) $C_{\tilde{d}2} = aI_v + bJ_v$,且 $\tilde{d}_2$ 為 $B(v, b_2, K_2)$ 中之全域最適集區設計。

<u>**證明:**</u>請參閱Stewart and Bradley (1991) 。

本文所指之全域最適設計是在 v, b_1, b_2, K_1, K_2 固定之下,不同之 M_{d12} 所對應之不同之全域最適行列設計而言。

在Kunert (1993) 以前的論文皆認為,全域最適行列設計的配置應儘可能地讓試驗處理平均地出現在各行與各列中,直至Kunert (1993)的論文提出後,這種"平衡"的配置方式才被證實出沒有絕對的必要性。然而Kunert (1993)中之例子是在 $b_1 = v, b_2 = zv(v-1), k_1 = z(v-1)^2, k_2 = v-1$ 的條件下,當 $z = 1$ 時,視行為集區時為BIBD,視列為集區時為BBD;而 $z > 1$ 時,視行為集區時仍為BIBD,但視列為集區時則不具最適性。亦即是當 $z = 1$ 時,試驗處理在行與列中仍維持"平衡"出現,但當 $z > 1$ 時,則此平衡性便不復見。然而此不平衡

性是否一定是經由複製得來?由下面的例子中可知並非如此。

我們可以找到一例在$b_1 = v$, $b_2 = z\frac{v!}{(v-t-1)!\,t!}$, $k_1 = z\frac{(v-1)!\,(v-t)}{(v-t-1)!\,t!}$, $k_2 = v-t$, $t = 0,1,\ldots,v-1$, $z \in N$的條件下,當$z=1, t=2$時,此一全域最適行列設計視行為集區時為BIBD、但視列為集區時則不具最適性。其配置的方式,首先是將同一行下,空點以外的位置填入該點所在列數之相對應的試驗處理,如遇到某一行下,空點位置與之前相同者,則該行的試驗處理配置按原順序向下一非空點位置循環排列,如下面之例2.1。

例2.1: 行列設計$d \in D(4,4,12,6I_4,2I_{12})$、其試驗處理之配置和空點結構如下:

$$d = \begin{pmatrix} . & . & 1 & . & 1 & 1 & 4 & . & 3 & . & 2 & . \\ . & 2 & . & 2 & . & 2 & . & . & . & 4 & 1 & 3 \\ 3 & . & . & 3 & 3 & . & . & 4 & 1 & . & . & 2 \\ 4 & 4 & 4 & . & . & . & 1 & 3 & . & 2 & . & . \end{pmatrix},$$

d中"."的位置表示空點; 1, 2, 3, 4分別代表4個試驗處理。

因為$N_{d1(2)} = O_{4\times4}$, $C_d = C_{\tilde{d}_2} = 4I_4 - J_4$; 且$\tilde{d}_2$為BIBD,所以根據定理2.1可知$d$為$D(4,4,12,6I_4,2I_{12})$中之全域最適行列設計,但$\tilde{d}_1$則不具任何最適性。

3. 主要定理

本節中我們證明將$N_{d1(2)} = O_{v\times b_1}$(或$N_{d2(1)} = O_{v\times b_2}$)之全域最適行列設計橫向(或縱向)複製$t$次後,所得之行列設計依舊具有全域最適性。並證明將若干個v相等且$N_{d1(2)}$均為$O_{v\times b_1}$(或$N_{d2(1)}$均為$O_{v\times b_2}$)之不同的全域最適行列設計做橫向(或縱向)合併時,所得之設計仍為全域最適行列設計。為考慮本節之流暢性,所有證明均省略,有興趣之讀者可參閱丁兆平、吳昕(1996)。

引理3.1: 令$d^{(A)} \in B(v, b^{(A)}, K^{(A)})$、$d^{(B)} \in B(v, b^{(B)}, K^{(B)})$,$d^{(A)}$、$d^{(B)}$皆為BUBD,則$d^{(A+B)} \in B(v, b^{(A)}+b^{(B)}, K^{(A+B)})$,其中$d^{(A+B)}$如圖1所示,亦為BUBD。

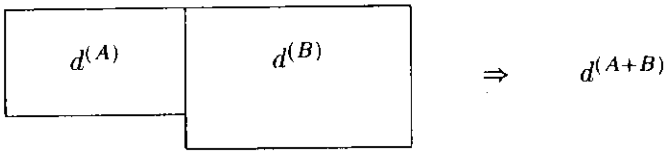

圖1. 橫向合併集區設計$d^{(A)}$與$d^{(B)}$

根據引理3.1可得如表所列的結果:

$d^{(A)}$	$d^{(B)}$	$d^{(A+B)}$
BIBD	BIBD	BIBD; BUBD
BBD	BBD	BBD; BUBD
BIBD	BBD	BUBD
BUBD	BIBD BBD BUBD	BUBD

由上表可知橫向合併兩個BIBD所得之設計,根據原設計之集區大小之異同,分別爲一BUBD或BIBD。

引理3.2: 假設 $d \in D(v, b_1, b_2, K_1, K_2)$, 若將 d 橫向複製 t 倍,所得之行列設計 $d^t \in D(v, b_1, tb_2, K_1^t, K_2^t)$, d^t 如圖2所示,其中

$$K_1^t = tK_1, \quad K_2^t = \begin{pmatrix} K_2 & & O \\ & \ddots & \\ O & & K_2 \end{pmatrix} = diag(K_2, \ldots, K_2),$$

且 $N_{d^t1(2)} = tN_{d1(2)}$, $C_{\bar{d}^t2} = tC_{\bar{d}2}$。

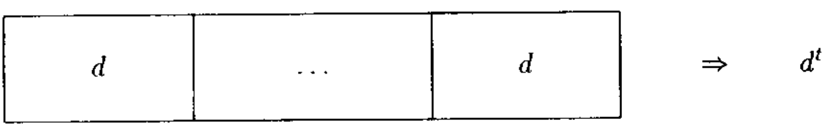

圖2. 橫向複製行列設計t倍

定理 3.1: 假設 $d^* \in D(v, b_1, b_2, K_1, K_2)$, 滿足 $N_{d^*1(2)} = O_{v\times b_1}$, $C_{\tilde{d}^*2} = aI_v + bJ_v$, 且 $\tilde{d}_2^* \in B(v, b_2, K_2)$ 爲一 BIBD, BBD, 或 BUBD。若將 d^* 橫向複製 t 倍, 所得之行列設計 d^{*t} 爲 $D(v, b_1, tb_2, K_1^t, K_2^t)$ 中之全域最適行列設計。

由定理 3.1 可得知, 任何符合定理中之條件之全域最適行列設計, 經橫向複製 t 倍後仍爲全域最適行列設計。

由於行列設計之行與列具有交換性, 因此定理中的條件若改爲行列設計 $d^* \in D(v, b_1, b_2, K_1, K_2)$, 滿足 $N_{d^*2(1)} = O_{v\times b_2}$ 和 $C_{\tilde{d}^*1} = aI_v + bJ_v$, 且 $\tilde{d}_1^* \in B(v, b_1, K_1)$ 爲一 BIBD、BBD, 或 BUBD, 且將 d^* 縱向複製 t 倍後, 所得之行列設計 $d^{*t} \in D(v, tb_1, b_2, K_1^t, K_2^t)$, 如圖 3 所示, 其中

$$K_1^t = \begin{pmatrix} K_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & K_1 \end{pmatrix} = diag(K_1, \ldots, K_1), \qquad K_2^t = tK_2,$$

則根據和引理 3.2, 定理 3.1 類似之定理, 可得 $N_{d^{*t}2(1)} = tN_{d^*2(1)}$, $C_{d^{*t}} = C_{\tilde{d}^{*t}1} = tC_{\tilde{d}^*1}$, 且 d^{*t} 仍爲 $D(v, tb_1, b_2, K_1^t, K_2^t)$ 中之全域最適行列設計。

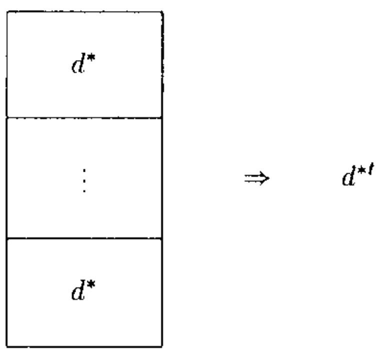

圖 3. 縱向複製行列設計 t 倍

例 3.1: 行列設計 d 同例 2.1, 且 $N_{d1(2)} = O_{4\times 4}$, $C_d = C_{\tilde{d}2} = 4I_4 - J_4$。若將 d 橫向

複製一次(即 $t=2$),則所形成的行列設計 $d^2 \in D(4,4,24,12I_4,2I_{24})$ 如下:

$$
\begin{aligned}
d^2 &= \begin{pmatrix}
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 4 & \cdot & 3 & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 4 & \cdot & 3 & \cdot & 2 & \cdot \\
\cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 1 & 3 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 1 & 3 \\
3 & \cdot & \cdot & 3 & 3 & \cdot & \cdot & 4 & 1 & \cdot & \cdot & 2 & 3 & \cdot & \cdot & 3 & 3 & \cdot & \cdot & 4 & 1 & \cdot & \cdot & 2 \\
4 & 4 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 3 & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 4 & 4 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 3 & \cdot & 2 & \cdot & \cdot
\end{pmatrix} \\
&= (d, d)\ 。
\end{aligned}
$$

由引理3.2可得,$N_{d^2 1(2)} = \mathrm{O}_{4\times 4}$, $C_{d^2} = C_{\tilde{d}^2 2} = 2\ C_{\tilde{d}2} = 8I_4 - 2J_4$,且根據引理3.1, $\tilde{d}_2^2$ 依舊爲BIBD,故根據定理3.1可知 d^2 爲 $D(4,4,24,12I_4,2I_{24})$ 中之全域最適行列設計。

上面例3.1,以及本文中之所有例題均不符合Kunert (1993)對 v, b_1, b_2, k_1, k_2 之限制,故其最適性無法由現有之論文證實,但可由本文之定理3.1證明。

<u>**引理3.3:**</u>假設 $d^{(A)} \in D(v, b_1, b_2^{(A)}, K_1^{\cdot(A)}, K_2^{\cdot(A)})$,且 $d^{(B)} \in D(v, b_1, b_2^{(B)}, K_1^{\cdot(B)}, K_2^{\cdot(B)})$,若將 $d^{(A)}$ 與 $d^{(B)}$ 橫向合併,如圖4所示,所得之行列設計 $d^{(A+B)} \in D(v, b_1, b_2^{(A)} + b_2^{(B)}, K_1^{\cdot(A+B)}, K_2^{\cdot(A+B)})$,其中

$$
K_1^{\cdot(A+B)} = K_1^{\cdot(A)} + K_1^{\cdot(B)}, \qquad K_2^{\cdot(A+B)} = \begin{pmatrix} K_2^{\cdot(A)} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & K_2^{\cdot(B)} \end{pmatrix},
$$

且 $N_{d^{(A+B)}1(2)} = N_{d^{(A)}1(2)} + N_{d^{(B)}1(2)}$, $C_{\tilde{d}^{(A+B)}2} = C_{\tilde{d}^{(A)}2} + C_{\tilde{d}^{(B)}2}$。

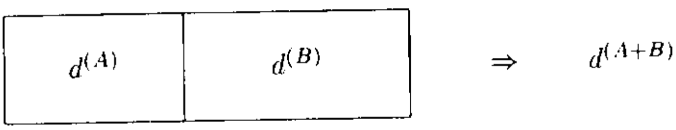

圖4. 橫向合併行列設計 $d^{(A)}$ 與 $d^{(B)}$

<u>**定理3.2:**</u>假設 $d^{*(A)} \in D(v, b_1, b_2^{(A)}, K_1^{\cdot(A)}, K_2^{\cdot(A)})$,滿足 $N_{d^{*(A)}1(2)} = \mathrm{O}_{v\times b_1}$、$C_{\tilde{d}^{*(A)}2} = aI_v + bJ_v$,且 $\tilde{d}_2^{*(A)} \in B(v, b_2^{(A)}, K_2^{\cdot(A)})$ 爲一BIBD, BBD,或BUBD。假設 $d^{*(B)} \in D(v, b_1, b_2^{(B)}, K_1^{\cdot(B)}, K_2^{\cdot(B)})$,滿足 $N_{d^{*(B)}1(2)} = \mathrm{O}_{v\times b_1}$, $C_{\tilde{d}^{*(B)}2} = a'I_v + b'J_v$,且 $\tilde{d}_2^{*(B)} \in B(v, b_2^{(B)}, K_2^{\cdot(B)})$ 爲一BIBD, BBD,或BUBD。若將 $d^{*(A)}$ 與 $d^{*(B)}$ 橫向合併,所得

之行列設計 $d^{*(A+B)}$ 仍爲 $D(v,b_1,b_2^{(A)}+b_2^{(B)},K_1^{\cdot(A+B)},K_2^{\cdot(A+B)})$ 中之全域最適行列設計。

由定理3.2可得知，將任何兩個符合定理中之條件且具有相同試驗處理個數，以及列個數之全域最適行列設計，做橫向合併後仍爲全域最適行列設計。

如前所述，行列設計之行與列具有交換性，因此定理中的條件若改爲 $d^{*(A)}\in D(v,b_1^{(A)},b_2,K_1^{\cdot(A)},K_2^{\cdot(A)})$，滿足 $N_{d^{*(A)}2(1)}=\mathrm{O}_{v\times b_2}$，$C_{\tilde{d}^{*(A)}1}=aI_v+bJ_v$，且 $\tilde{d}_1^{*(A)}\in B(v,b_1^{(A)},K_1^{\cdot(A)})$ 爲一 BIBD、BBD、或 BUBD; $d^{*(B)}\in D(v,b_1^{(B)},b_2,K_1^{\cdot(B)},K_2^{\cdot(B)})$，滿足 $N_{d^{*(B)}2(1)}=\mathrm{O}_{v\times b_2}$，$C_{\tilde{d}^{*(B)}2}=a'I_v+b'J_v$，且 $\tilde{d}_1^{*(B)}\in B(v,b_1^{(B)},K_1^{\cdot(B)})$ 亦爲一 BIBD, BBD, 或BUBD。若將 $d^{*(A)}$ 與 $d^{*(B)}$ 縱向合併，所得之行列設計 $d^{*(A+B)}\in D(v,b_1^{(A)}+b_1^{(B)},b_2,K_1^{\cdot(A+B)},K_2^{\cdot(A+B)})$，如圖5所示，其中

$$K_1^{\cdot(A+B)}=\begin{pmatrix} K_1^{\cdot(A)} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & K_1^{\cdot(B)} \end{pmatrix},\qquad K_2^{\cdot(A+B)}=K_2^{\cdot(A)}+K_2^{\cdot(B)},$$

且 $d^{*(A+B)}$ 仍爲 $D(v,b_1^{(A)}+b_1^{(B)},b_2,K_1^{\cdot(A+B)},K_2^{\cdot(A+B)})$ 中之全域最適行列設計。

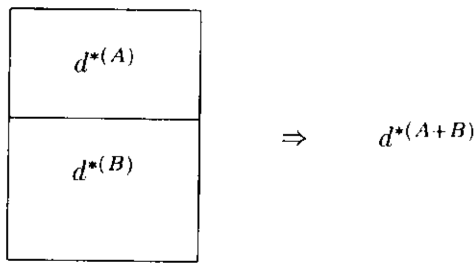

圖5. 縱向合併行列設計 $d^{*(A)}$ 與 $d^{*(B)}$

例3.2: 行列設計 $d^{(A)}$ 同例2.1中之 d，另外，行列設計 $d^{(B)}\in D(4,4,12,9I_4,3I_{12})$，和空點之結構如下:

$$d^{(B)}=\begin{pmatrix} . & 1 & 1 & 1 & . & 4 & 4 & 3 & . & 3 & 2 & 2 \\ 2 & . & 2 & 2 & 4 & . & 1 & 1 & 3 & . & 4 & 3 \\ 3 & 3 & . & 3 & 2 & 1 & . & 2 & 4 & 4 & . & 1 \\ 4 & 4 & 4 & . & 3 & 3 & 2 & . & 2 & 1 & 1 & . \end{pmatrix},$$

其中 $N_{d^{(B)}1(2)} = O_{4\times4}$、$C_{d^{(B)}} = C_{\tilde{d}^{(B)}2} = 8I_4 - 2J_4$；且 $\tilde{d}_2^{(B)}$ 爲BIBD、所以根據定理2.1可知 $d^{(B)}$ 爲 $D(4,4,12,9I_4,3I_{12})$ 中之全域最適行列設計。若將 $d^{(A)}$ 與 $d^{(B)}$ 橫向合併，所構成的行列設計 $d^{(A+B)}$ 如下：

$$d^{(A+B)} = \begin{pmatrix} . & . & 1 & . & 1 & 1 & 4 & . & 3 & . & 2 & . & . & 1 & 1 & 1 & . & 4 & 4 & 3 & . & 3 & 2 & 2 \\ . & 2 & . & 2 & . & 2 & . & . & . & 4 & 1 & 3 & 2 & . & 2 & 2 & 4 & . & 1 & 1 & 3 & . & 4 & 3 \\ 3 & . & . & 3 & 3 & . & . & 4 & 1 & . & . & 2 & 3 & 3 & . & 3 & 2 & 1 & . & 2 & 4 & 4 & . & 1 \\ 4 & 4 & 4 & . & . & . & 1 & 3 & . & 2 & . & . & 4 & 4 & 4 & . & 3 & 3 & 2 & . & 2 & 1 & 1 & . \end{pmatrix},$$

其中 $d^{(A+B)} \in D(4,4,24,15I_4,K_2^{(A+B)})$，$K_2^{(A+B)} = diag(2I_{12},3I_{12})$、由引理3.3可得、$N_{d^{(A+B)}1(2)} = O_{4\times4}$，$C_{d^{(A+B)}} = C_{\tilde{d}^{(A+B)}2} = 12I_4 - 3J_4$，且根據引理3.1 $\tilde{d}_2^{(A+B)}$ 爲BUBD、故根據定理3.2、$d^{(A+B)}$ 爲 $D(4,4,24,15I_4,K_2^{(A+B)})$ 中之全域最適行列設計。

實際上定理3.2中、行列設計 $d^{(A)}$ 與 $d^{(B)}$ 之 b_1 必須相等的條件是可以放鬆的，只是要將 $b_1^{(A)}$ 與 $b_1^{(B)}$ 中較小的一設計予以補 $|b_1^{(A)} - b_1^{(B)}|$ 列的空點即可，且空點補於任意列均無差別。

例3.3: 行列設計 $d^{(A)} \in D(4,3,12,12I_3,3I_{12})$、其試驗處理之配置和空點之結構如下：

$$d^{(A)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $N_{d^{(A)}1(2)} = O_{4\times3}$、$C_{d^{(A)}} = C_{\tilde{d}^{(A)}2} = 8I_4 - 2J_4$；且 $\tilde{d}_2^{(A)}$ 爲BIBD、所以由定理2.1可知 $d^{(A)}$ 爲 $D(4,3,12,12I_3,3I_{12})$ 中之全域最適行列設計。另外，行列設計 $d^{(B)}$ 同於例3.2中之 $d^{(B)}$。若將 $d^{(A)}$ 與 $d^{(B)}$ 橫向合併，則所構成的行列設計 $d^{(A+B)}$ 如下：

$$d^{(A+B)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & . & 1 & 1 & 1 & . & 4 & 4 & 3 & . & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & . & 2 & 2 & 4 & . & 1 & 1 & 3 & . & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & . & 3 & 2 & 1 & . & 2 & 4 & 4 & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 4 & 4 & 4 & . & 3 & 3 & 2 & . & 2 & 1 & 1 & . \end{pmatrix}.$$

其中 $d^{(A+B)} \in D(4,4,24,K_1^{(A+B)},3I_{24})$、$K_1^{(A+B)} = diag(21,21,21,9)$，由引理3.3

可得，$N_{d(A+B)1(2)} = O_{4\times4}$，$C_{d(A+B)} = C_{\tilde{d}(A+B)2} = 16I_4 - 4J_4$，且根據引理3.1 $\tilde{d}_2^{(A+B)}$ 爲BIBD，所以根據定理3.2，$d^{(A+B)}$ 爲 $D(4,4,24,K_1^{(A+B)},3I_{24})$ 中之全域最適行列設計。

4. 複製全域最適行列設計之效率

第三節中是針對全域最適行列設計的特性做探討，由定理3.1證實出全域最適行列設計做橫向或縱向(視 $N_{d1(2)} = O_{v\times b_1}$ 或 $N_{d2(1)} = O_{v\times b_2}$ 而定)任意整數倍的複製後，仍爲全域最適行列設計。但若我們所需要的設計結構是往另一方向，縱向或橫向複製數倍的情形時，則行列設計的配置方式採直接複製或複製後的部份對試驗處理重新命名，是否能夠與全域最適行列設計相近，若能相近則可省去重新配置的困擾，尤其當行列數較大時，更能感受其方便有效之處。

但因爲任一行列設計且結構中具有空點的情況之下，欲找到符合全域最適行列設計的配置可能甚爲困難。所以本節中，我們先將經一次複製的行列設計及複製後的部份對試驗處理重新命名的行列設計，分別與符合定義2.2之廣義二項設計做特徵值的比較，並計算出此兩兩行列設計相較之下的效率。複製後的部份對試驗處理重新命名的方式，是根據原行列設計複製之方向所對應的集區設計中集區大小最小者，做爲試驗處理平移的依據。本文中所定義的"效率"是指，將複製後的行列設計之特徵值，與廣義二項設計之特徵值，做調和平均數之比。其中廣義二項設計的配置方法，是由 $N_{\bar{d}1}$(或 $N_{\bar{d}2}$)矩陣出發，使各列(或行)之下所有試驗處理出現的次數儘可能相等，且任兩試驗處理在列中(或行中)成對出現的次數也儘可能相等。然後根據 $N_{\bar{d}1}K_1{}^{-1}M_{d12}$(或 $N_{\bar{d}2}K_2{}^{-1}M_{d21}$)的值，取 $N_{\bar{d}2}$(或 $N_{\bar{d}1}$)以使得 $N_{d2(1)}$ (或 $N_{d1(2)}$)儘可能接近零矩陣。根據 $N_{\bar{d}1}$ 與 $N_{\bar{d}2}$ 所提供的訊息，作爲配置廣義二項設計時的參考依據。至於應該由 $N_{\bar{d}1}$ 或 $N_{\bar{d}2}$ 矩陣出發，則視 C-矩陣計算出的特徵值大小而定，取能夠使得特徵值較大者。我們嘗試了許多不同空點位置、不同試驗處理個數以及行列大小的例子，但限於篇幅，僅給出較具代表性之例子，分述於後。

例4.1: 行列設計 d 同例3.3中之 $d^{(A+B)}$，經證實爲 $D(4,4,24,K_1,3I_{24})$，$K_1 =$

$diag(21,21,21,9)$ 中之全域最適行列設計，其中 $N_{d1(2)} = O_{4\times 4}$ 。若將 d 橫向複製，則根據定理3.1，所得之設計仍爲全域最適行列設計。若將 d 縱向複製一次後再重新命名，所構成的行列設計 $d^{(1)}$ 如下：

$$d^{(1)} = \begin{pmatrix} d \\ d^{*} \end{pmatrix},$$

其中 d^{*} 表示將 d 中之試驗處理做三位平移，即 $1 \to 4,\ 2 \to 1,\ 3 \to 2,\ 4 \to 3$ 。經計算可得其特徵值分別爲：0, 33.89, 33.89, 35.78 。

另外，符合定義2.2之廣義二項設計 $d^{(2)}$ 配置如下：

$$d^{(2)} = \begin{pmatrix}
1&2&3&4&1&2&3&4&1&2&3&4&.&1&1&1&.&4&4&3&.&3&2&2\\
4&1&2&3&4&1&2&3&4&1&2&3&2&.&2&2&4&.&1&1&3&.&4&3\\
3&4&1&2&3&4&1&2&3&4&1&2&3&3&.&3&2&1&.&2&4&4&.&1\\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&4&4&4&.&3&3&2&.&2&1&1&.\\
2&3&4&1&2&3&4&1&2&3&4&1&.&1&3&1&.&4&1&4&.&2&3&2\\
3&4&3&1&3&1&4&2&2&4&1&2&3&.&1&2&2&.&3&1&2&.&4&4\\
4&2&2&4&1&2&3&4&3&1&3&1&2&3&.&4&1&2&.&3&3&4&.&1\\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1&2&4&.&4&3&4&.&1&3&2&.
\end{pmatrix},$$

經計算可得其特徵值分別爲：0, 34.54, 34.61, 34.62 。$d^{(1)}$ 與 $d^{(2)}$ 相較之下的效率則約可達99.73% 。

例4.2: 行列設計 $d \in D(6,4,18,K_1,K_2)$ 爲一全域最適行列設計，其中 $K_1 = diag(18,18,6,6)$, $K_2 = diag(2I_{12},4I_6)$，其試驗處理之配置和空點之結構如下：

$$d = \begin{pmatrix}
1&3&5&4&2&6&1&5&3&2&6&4&1&2&3&4&5&6\\
2&4&6&5&3&1&5&3&1&6&4&2&4&5&6&1&2&3\\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&2&3&1&5&6&4\\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&5&6&4&2&3&1
\end{pmatrix},$$

若將 d 縱向複製一次後再重新命名，所構成的行列設計 $d^{(1)}$ 如下：

$$d^{(1)} = \begin{pmatrix} d \\ d^{*} \end{pmatrix},$$

其中d^*表示將d中之試驗處理做二位平移，即$1\rightarrow 3,\ 2\rightarrow 4,\ 3\rightarrow 5,\ 4\rightarrow 6,\ 5\rightarrow 1,\ 6\rightarrow 2$。經計算可得其特徵值分別為: 0, 12.0, 15.0, 15.0, 15.0, 15.0。

另外，符合定義2.2之廣義二項設計$d^{(2)}$配置如下:

$$d^{(2)}=\begin{pmatrix}
1&3&5&4&2&6&1&5&3&2&6&4&1&2&3&4&5&6\\
2&4&6&5&3&1&5&3&1&6&4&2&4&5&6&1&2&3\\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&2&3&1&5&6&4\\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&5&6&4&2&3&1\\
4&1&2&3&4&5&6&1&2&3&5&6&3&1&2&6&4&5\\
5&6&1&2&5&3&4&6&4&1&2&3&6&4&5&3&1&2\\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1&3&5&4&2&6\\
.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&2&4&6&5&3&1
\end{pmatrix},$$

經計算可得其特徵值分別為: 0, 14.22, 14.75, 15.19, 15.37, 15.46。$d^{(1)}$與$d^{(2)}$相較之下的效率則約可達95.34%。

例4.3: 行列設計d同例2.1中之d，若將d縱向複製一次後再重新命名，所構成的行列設計$d^{(1)}$如下:

$$d^{(1)}=\begin{pmatrix} d\\ d^*\end{pmatrix},$$

其中d^*表示將d中之試驗處理做二位平移，即$1\rightarrow 3,\ 2\rightarrow 4,\ 3\rightarrow 1,\ 4\rightarrow 2$。經計算可得其特徵值分別為: 0, 8.0, 10.67, 10.67。

另外，符合定義2.2之廣義二項設計$d^{(2)}$配置如下:

$$d^{(2)}=\begin{pmatrix}
.&.&3&.&2&1&4&.&3&.&4&.\\
.&4&.&3&.&2&.&.&.&1&1&2\\
1&.&.&4&3&.&.&2&1&.&.&3\\
2&1&4&.&.&.&3&1&.&2&.&.\\
.&.&1&.&4&3&2&.&2&.&3&.\\
.&2&.&1&.&4&.&.&.&3&2&4\\
3&.&.&2&1&.&.&4&4&.&.&1\\
4&3&2&.&.&.&1&3&.&4&.&.
\end{pmatrix},$$

經計算可得其特徵值分別為: 0, 11.24, 11.54, 11.63 。$d^{(1)}$ 與 $d^{(2)}$ 相較之下的效率則約可達83.73% 。

例4.4: 行列設計 $d \in D(5,10,15,K_1,K_2)$ 為一全域最適行列設計，其中 $K_1 = diag(15I_7, 5I_3)$, $K_2 = diag(7I_{10}, 10I_5)$, 其試驗處理之配置和空點之結構如下:

$$d = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&1&2&3&4&5&1&2&3&4&5 \\ 5&1&2&3&4&5&1&2&3&4&5&1&2&3&4 \\ 4&5&1&2&3&4&5&1&2&3&4&5&1&2&3 \\ 3&4&5&1&2&3&4&5&1&2&3&4&5&1&2 \\ 2&3&4&5&1&2&3&4&5&1&2&3&4&5&1 \\ 1&3&1&5&2&4&2&4&3&5&1&2&3&4&5 \\ 2&1&4&1&3&2&5&3&5&4&5&1&2&3&4 \\ .&.&.&.&.&.&.&.&.&.&4&5&1&2&3 \\ .&.&.&.&.&.&.&.&.&.&3&4&5&1&2 \\ .&.&.&.&.&.&.&.&.&.&2&3&4&5&1 \end{pmatrix},$$

若將 d 縱向複製一次後再重新命名，所構成的行列設計 $d^{(1)}$ 如下:

$$d^{(1)} = \begin{pmatrix} d \\ d^* \end{pmatrix},$$

其中 d^* 表示將 d 中之試驗處理做二位平移，即 $1 \to 3,\ 2 \to 4,\ 3 \to 5,\ 4 \to 1,\ 5 \to 2$ 。經計算可得其特徵值分別為: 0, 47.23, 47.54, 47.61, 47.90 。

另外，符合定義2.2之廣義二項設計 $d^{(2)}$ 配置如下:

$$d^{(2)} = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\
3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\
1 & 3 & 1 & 5 & 2 & 4 & 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
2 & 1 & 4 & 1 & 3 & 2 & 5 & 3 & 5 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\
3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\
3 & 2 & 5 & 4 & 5 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
4 & 5 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 1 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 3 & 4 & 5 & 1
\end{pmatrix},$$

經計算可得其特徵值分別爲: 0, 47.86, 47.86, 47.86, 47.86。根據定義 2.1、定理 2.1 可知 $d^{(2)}$ 爲全域最適行列設計。而 $d^{(1)}$ 與 $d^{(2)}$ 相較之下的效率則約可達 99.39%。

<u>**例 4.5:**</u> 行列設計 $d \in D(5, 15, 15, K_1, K_2)$ 爲一全域最適設計，其中 $K_1 = diag(15I_7, 5I_8)$、$K_2 = diag(7I_{10}, 15I_5)$，其試驗處理之配置和空點之結構如下:

$$
d = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\
3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\
1 & 3 & 1 & 5 & 2 & 4 & 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
2 & 1 & 4 & 1 & 3 & 2 & 5 & 3 & 5 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\multicolumn{10}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\
\multicolumn{10}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\
\multicolumn{10}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\
\multicolumn{10}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\multicolumn{10}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\multicolumn{10}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\
\multicolumn{10}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\
\multicolumn{10}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & 2 & 3 & 4 & 5 & 1
\end{pmatrix},
$$

若將 d 縱向複製一次後再重新命名,所構成的行列設計 $d^{(1)}$ 如下:

$$
d^{(1)} = \begin{pmatrix} d \\ d^{*} \end{pmatrix},
$$

其中 d^{*} 表示將 d 中之試驗處理做二位平移,即 $1 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 5$, $4 \to 1$, $5 \to 2$。經計算可得其特徵值分別爲: 0, 57.23, 57.54, 57.61, 57.90。

另外,符合定義2.2之廣義二項設計 $d^{(2)}$ 配置如下:

$$
d^{(2)} = \begin{pmatrix} d \\ d^{**} \end{pmatrix},
$$

其中 d^{**} 如下,

$$
d^{**} = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\
3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\
3 & 2 & 5 & 4 & 5 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
4 & 5 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 1 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 2 & 3 & 4 & 5 & 1
\end{pmatrix},
$$

經計算可得其特徵值分別爲：0, 57.86, 57.86, 57.86, 57.86。根據定義 2.1, 定理 2.1 可知 $d^{(2)}$ 爲全域最適行列設計。而 $d^{(1)}$ 與 $d^{(2)}$ 相較之下的效率則約可達 99.50%。

5. 討論

根據第四節中之例4.1至例4.3所得到的結果可看出，當複製的方向爲縱向時，原行列設計由行方向來看，若 k_{2j}, $j=1,\ldots,b_2$ 普遍小於 v，即試驗處理出現在該行爲不完全(incomplete)時，則 k_{2j} 與 v 相差愈大，行列設計採直接複製的效率愈不如廣義二項設計，但若將複製後的部份做試驗處理的重新命名，則所構成的行列設計與廣義二項設計在效率上差距變小(參見例4.3)。至於 k_{2j} 和 v 相差不是很大時，直接複製的效果亦相當不錯(參見例4.1, 例4.2)。

由例4.4、例4.5所得到的結果可看出，若複製的方向爲縱向時，原行列設計由行方向來看，若 k_{2j}, $j=1,\ldots,b_2$ 普遍大於 v，即所有試驗處理在該行中至少出現一次或以上時，行列設計採直接複製或複製後的部份對試驗處理重新命

名，皆與廣義二項設計在效度上相差甚少。

綜合上述，我們所得之結論如下：當全域最適行列設計橫向複製時仍爲全域最適設計，但當縱向複製不具任何最適性時，

(1) 若原設計之行大小大於處理個數，或行大小小於處理個數但差距不大時，直接縱向複製與重新配製成廣義二項設計之效度相近，故我們建議可直接採用縱向複製的方法，以避免重新配置的困擾。

(2) 若行大小小於處理個數且差距大時，我們建議將縱向複製後的部份做試驗處理的重新命名。

參考文獻

Hedayat, A. and Raghavarao, D. (1975). 3-way BIB designs. *J. Combin. Theory Ser.* **18**, 207-209.

Jacroux, M. and Ray, R. S. (1991). On the determination and construction of optimal row-column designs having unequal row and column size. *Ann. Inst. Statist. Math.* **43**, 377-390.

Kiefer, J. (1975). Construction and optimality of generalized Youden designs. In *A Survey of Statistical Designs and Linear Models* (Edited by J. N. Srivastava), 333-353. North-Holland, Amsterdam.

Kunert, J. (1993). A note on optimal designs with a non-orthogonal row-column-structure. *J. Statist. Plann. Infer.* **37**, 265-270.

Ray, R. S. (1986). Optimal designs under a certain class of non-orthogonal row-column structure. *Sankhyā* **48**, 44-67.

Shah, K. R. and Sinha, B. K. (1993). Optimality aspects of row-column designs with non-orthogonal structure. *J. Statist. Plann. Infer.* **36**, 331-346.

Stewart, F. P. and Bradley, R. A. (1991). Some universally optimal row-column designs with empty nodes. *Biometrika* **78**, 337-348.

丁兆平、吳昕(1996)。有空點存在之情形下行列設計最適性之探討。技術報告,國立政治大學統計系。

[民國85年7月22日收稿,85年11月22日修訂]

Universally Optimal Row-Column Designs with Empty Nodes

Chao-Ping Ting and Shing Wu

Department of Statistics

National Chengchi University

Taipei, Taiwan, 11623, R.O.C.

ABSTRACT

Identification of universally optimal row-column designs with empty nodes is investigated. We show that Kunert's (1993) examples of universally optimal generalized non-binary designs are not special cases. One can construct a universally optimal generalized non-binary design either by copying a universally optimal binary design t times in the row direction or column direction, or by combining several different universally optimal binary designs in the row direction or column direction. The efficiencies of "non-optimal" generalized non-binary designs that are constructed by direct copying a universally optimal binary design are also discussed.

Key words and phrases: Balanced block design, balanced incomplete block design, balanced unequal block design, generalized binary design, row-column design, universally optimal design.

AMS 1991 subject classifications: Primary 62K10; secondary 62K05, 05B05.