第二章　文獻回顧

本論文本論文研究選擇權交易策略之規劃模型，其主要應用之主要工具概分為三部分：以線性規劃建立投資組合、選擇權的評價方式與選擇權的套利規劃模型，本章將以此三大主軸介紹及回顧相關的研究。

2.1. 利用線性規劃求最佳投資組合

線性規劃可以處理含有許多限制式與單一目標的最佳化問題，並能快速的利用點腦軟體求得其最後解，因此一般工商界常用現性規劃來解決生產、倉儲或運輸等最優化問題，近年來在財務金融領域也使用線性規劃來求出最佳投資組合。

Markowitz (1952)藉由資產報酬率之變異數的不確定性，提出平均變異數模型(mean-variance model)將最佳投資組合建構在兩個參數的模型上。Markowitz 所建構之最佳化模型，可在固定的期望報酬下，選取風險最小的投資組合，處理投資者如何選擇最佳投資組合的問題。

Konno 與 Yamazaki (1991)改良 Markowitz 的最佳化模型，提出 L_1 函數。其模型可改善 Markowitz 模型需複雜的計算的缺點，使求解過程變得相對容易。

Pelsser 與 Vorst (1995)考慮包含股票和歐式選擇權的投資組合，提出如何建構最佳投資組合的模型，可求出最大預期報酬，且這個投資組合能夠抑制不足額風險的產生。

Dert 與 Oldenkamp (2000)考慮一個含有股票、選擇權和無風險資產的投資組合，經由其所建構之線性規劃模型，可得到這個投資組合的最小報酬。Dert 與 Oldenkamp 的模型除了考慮賭場效應(casino effect)的，亦可控制較低的風險。

2.2. 選擇權的評價方法

Black 與 Scholes 在 1973 年提出的歐式選擇權評價模型為選擇權評價模式之濫觴。其選擇權評價模型考量在連續時間的架構中，在無套利機會的假定中，使用隨機微分方程決定選擇權的合理價格。

另一種選擇權的評價方法，則是考量選擇權價格在離散時間的變動。Cox、Ross 與 Rubinstein (1979)提出二項式評價模型(binomial pricing model)，只需基本的數學運算即可從到期日的可能標的資產價格往回推算不同時點與不同標的資產價格所對應的選擇權公正價格。

第三種則是考慮交易成本的選擇權評價模型。

2.2.1. 連續時間的選擇權評價模型

Black 與 Scholes (1973)在連續時間的架構中，在無套利機會的條件與其他假設條件，透過含有選擇權與標的資產的投資組合進行動態避險，建立一微分方程，加上到期日現金流量的邊界條件(boundery condition)，解此偏微分方程即得選擇權的公式解(close-form solution)。Black-Scholes 歐式選擇權評價模型中有五個參數(Greek parameters)：標的物價格、存續時間、履約價格、無風險利率和股價波動度。將選擇權價格的公式解對前述參數作偏微分，所得之偏導數表示這五個參數變動時選擇權價格的變動，可作為選擇權的避險。

Merton (1973)考慮標的資產配給一連續性現金股利，透過無風險投資組合與解偏微分方程，建構其選擇權評價模型。Merton 克服 Black-Scholes 的選擇權評價模型，需假設標的資產價格波動度為常數，不符實際市場情況的困窘。

Harrison 與 Kerps (1979)提出平賭過程評價方法(martingale pricing method)。考慮當資產的價格變動呈現幾何布朗運動(Brownian motion)時，利用 Girsonov 定理轉換原本的機率測度，建立一風險中立的機率測度，使原來非平賭過程的價格

變動過程經折現之後，在新的機率測度下為一平賭(martingale)過程。由 Harrison 與 Kerps 的選擇權評價模型所得結果與 Black-Scholes 公式相同。

2.2.2. 離散時間的選擇權評價模型

二元樹評價模型將標的資產價格的變動以非連續的離散時點來處理。Cox、Ross 與 Rubinstein (1979)提出二元數選擇權評價模型(binomial option pricing model)，是在離散時間(discrete time)的架構下評價選擇權的概念。此模型藉由標的資產的到期日價格,往前推算出不同時點與不同標的資產所對應的選擇權公正價格,評價的基本構想仍是建立一個投資組合可以複製選擇權未來的報酬,使得標的資產價格上漲或下跌時均無套利機會。

Rubinstein (1994)利用隱含二元樹模型(implied binomial tree model)，將同時觀察到的歐式選擇權的價格，還原出一組隱含風險中立(risk-neutral)機率測度，文中提出簡單的逆向遞迴算法,可容易產生完整二元樹每一點相對應之隱含風險中立機率測度。

Rubinstein 與 Jackwerth (1996)提出還原風險中立機率測度的方法。在標的資產與對應的選擇權價格滿足賭過程的條件下，先給定一個先驗機率分配，利用數學規劃的方法,找出一組與先驗機率分配很接近且滿足平賭過程限制式的機率分配，而求得的機率測度即為風險中立機率測度，再依此機率測度算出選擇權的合理價格。

2.2.3. 考慮交易成本的選擇權評價模型

由於在 Black-Scholes 歐式選擇權評價模型中，其中一項假設為不存在交易成本，與真實市場的情況不符。當交易成本不為 0 時，利用 Black-Scholes 來評價，會因擴散過程有無窮的變動，導致連續避險交易變得十分昂貴。因此考慮有交易成本時，需要修正 Black-Scholes 的模型，以符合市場實際情形。

Leland (1985)考慮交易成本不為 0 時，延續 Black-Scholes 評價模型，假設交易發生在離散的區間，交易成本為比例制，提出選擇權的定價公式和複製策略。Leland 將買進股票考慮交易成本時需付金額比沒有交易成本時需付金額來得高，與賣出股票考慮交易成本時所得金額比沒有交易成本時所得金額來得低，視為股價的波動度(volatility)提高。Leland 把 Black-Scholes 評價公式中的股價波動度調高，所提出新的選擇權評價公式與複製策略，和交易成本的多少與修正公式的時間長短有關，能容易地算出期望報酬與選擇權價格的上下界。

Merton (1990)在離散時間下考慮比例制交易成本且滿足自我融資(self-finance)的條件，建構出一個含有風險股票和無風險債券的投資組合(portfolio)，可以成功地複製歐式選擇權在到期日的價格。

Boyle 與 Vorst (1992)的觀點同 Merton (1990)，由單期交易延伸至多期交易，經遞迴過程發展出複製選擇權價格的投資組合，並能計算出選擇權價格的上下界。由投資組合現在價值推算而得買權或賣權價格的上界，可以複製買進選擇權的報酬。當交易成本趨近於 0 時，Boyle 與 Vorst 的選擇權價格收斂到 Cox-Ross-Rubinstein 的選擇權價格。

陳松男 (1999)在間斷性避險及比例制交易成本下，藉調整股票波動度修正 B-S 買權評價模型。陳松男指出當重新調整避險時間愈長，股價波動度比原來 B-S 公式的波動度大，選擇權價格較 B-S 公式算出的選擇權價格高。亦即，發行人認購權證的風險會隨重新調整避險的時間愈長而承受愈高的風險，因此權利金也較高。

Stettner (2000)在離散時間的不完備市場中，考慮最後報酬的效用函數，得到含比例制交易成本的選擇權評價公式。Stettner 在 Cox-Ross-Rubinstein 的架構下，且滿足自我融資的條件，留意到在大筆的交易金額下會得到相對小的交易成本，提出含交易成本的選擇權複製策略和評價公式。

Palmer (2001)對 Boyle 與 Vorst (1992)於買進或賣出選擇權所建構的自我融資複製策略，需要滿足額外三個條件，才能適用於賣出選擇權的困窘，提出修正公

式。Palmer 的修正公式不需前述的額外三個條件，即能適用於買進或賣出選擇權還有其他 Boyle 與 Vorst 公式無法使用的情況。

Sass (2005)同樣在 Cox-Ross-Rubinstein 數期交易的架構下，考慮比例制和固定制交易成本，針對一般效用函數，把最終報酬之最大效用函數的問題，視為一馬可夫控制問題，再藉由解動態規劃求得最佳投資策略。

Melnikov 與 Petrachenko (2005)延續 Cox-Ross-Rubinstein 二元樹定價模型，考慮一個銀行存款利率與貸款利率不同的風險性資產，來評價含有交易成本的選擇權價格。Melnikov 與 Petrachenko 提出附帶條件是假設市場變數為二維隨機變數，使得他們的公式滿足自我融資策略。

2.3. 選擇權的套利規劃模型

根據 B-S 的套利論點發展出來的選擇權定價理論：經由連續調整一個包含股票和無風險債券的投資組合，投資者可以很精確地複製出選擇權在該股票的報酬。因此這個選擇權的價值必定和複製的投資組合的價值相等。套利即為選擇權的市場價格和理論價格之間的差。投資人可利用套利機會的存在，建構一選擇權交易策略，獲得無風險報酬。

Rendleman (1995)利用 Black-Scholes 評價公式中的 Greek 參數(delta、gamma、theta、rho、kappa)，發展出簡單的線性規劃模型建立包含選擇權和股票的投資組合，期望能由不公正的選擇權價格產生套利機會得到最大獲利。

Papahristodoulou (2003)建構的線性規劃模型和 Rendleman (1995)相似，需藉由估計標的資產的波動度，來計算選擇權價格和相關的 Greek 參數。Papahristodoulou 發現其線性規劃模型有兩個缺失，一個是當實際情況的限制式非線性且 Greek 參數並非常數時，模型有失效的可能；另一個限制則是沒有考慮交易成本，與實務情況不符。

楊靜宜 (2004)考慮一序列到期日相同但履約價格不同的買權與賣權，證明在滿足某些假設下，套利機會存在的條件。利用此條件，發展一整數線性規劃模型，建立最佳的交易策略，並以 Ericsson 的選擇權為例，來驗證其模型。

Liu 與 Liu (2006)延續楊靜宜所提出套利機會存在的條件，以台指選擇權(TXO)為研究對象，發展一隨機整數線性規劃模型(stochastic integer linear programming model)，並改良此線性規劃模型，能消除投資組合收益的不確定性。

前述文獻中選擇權的線性規劃模型均未考慮交易成本，本論文將交易時產生的交易成本加入目標函數與限制式之內，再以台指選擇權為例，探討考慮交易成本後，市場是否依然存有套利機會，並尋找最佳投資組合。