第二章 文獻探討

第一節 APC 模型介紹

自 Frost（1939）將世代分析應用於分析結核病的研究後，Greenberg（1950）首次提出 APC（Age-Period-Cohort；年齡–年代–世代）模型，以三個因子分析的方式，分別將年齡、年代和世代效應量化，也就是統計分析的廣義線性模型（Generalized Linear Model），APC 模型成為流行病學常見的分析工具之一，主要用途在於資料的基本描述（Descriptive Statistics），採用圖表檢測疾病率的模式（Kupper, 1985），這種分析方法使用最為頻繁，但也因為模型上的限制而廣受爭議。

分析 APC 模型所需資料形式為年齡和年代的二維表格，受限於許多原始資料的紀錄方式，還有基於參數的管理、獲得合理的平滑參數曲線以及避免參數過多的考量下，多將年齡、年代分做五年為一組。以台灣地區男性資料為例（參表 1），每一列代表年齡組，自 0 歲至 75 歲，共有 16 個年齡組（括號內為年齡組的編號，以 i 表示），每一行代表年代組，自 1961 年至 2005 年，共有 9 個年代組（括號內為年代組的編號，以 j 表示），每一個左上到右下的對角線，如圖中虛線所切割的部分則代表一個世代，左下角代表的是西元 1886–1890 年，是為最年長的世代，依序往上，右上角代表的是西元 2001–2005 年，是為最年輕的世代，共有 $16 + 9 - 1 = 24$ 個世代組（括號內為世代組的編號，以 k 表示），其中最年長和最年輕的世代僅有一組觀察值，因此在分析此兩個世代時，可以想見將有較大的變異。

表 1 台灣地區男性（每十萬人之死亡人數）

年齡	(i)	年代 (j) 1961 (1)	1966 (2)	1971 (3)	1976 (4)	1981 (5)	1986 (6)	1991 (7)	1996 (8)	2001 (9)	世代 (k)	
0	*(1)*	1265	782	544	415	318	202	180	199	173		
5	*(2)*	120	92	72	57	58	51	39	30	23	*2001*	*(24)*
10	*(3)*	86	69	57	54	57	43	41	35	25	*1996*	*(23)*
15	*(4)*	142	127	108	132	133	132	130	123	82	*1991*	*(22)*
20	*(5)*	213	202	171	167	171	156	154	137	102	*1986*	*(21)*
25	*(6)*	232	229	207	178	183	164	175	156	121	*1981*	*(20)*
30	*(7)*	286	255	239	225	213	190	205	213	178	*1976*	*(19)*
35	*(8)*	375	343	313	309	292	258	272	273	262	*1971*	*(18)*
40	*(9)*	553	489	409	432	429	390	376	389	367	*1966*	*(17)*
45	*(10)*	776	736	596	611	627	573	564	550	504	*1961*	*(16)*
50	*(11)*	1309	1070	994	883	868	810	819	825	687	*1956*	*(15)*
55	*(12)*	2069	1755	1540	1403	1320	1187	1171	1217	1109	*1951*	*(14)*
60	*(13)*	3291	2884	2674	2071	2115	1829	1730	1796	1583	*1946*	*(13)*
65	*(14)*	4970	4619	4213	3438	3411	3005	2615	2532	2501	*1941*	*(12)*
70	*(15)*	7691	7035	6705	6139	5285	4868	4291	3992	3590	*1936*	*(11)*
75	*(16)*	11673	10687	10334	9810	7904	7939	7004	6448	5416	*1931*	*(10)*
世代 (k)		*1886* *(1)*	*1891* *(2)*	*1896* *(3)*	*1901* *(4)*	*1906* *(5)*	*1911* *(6)*	*1916* *(7)*	*1921* *(8)*	*1926* *(9)*		

APC 模型通常以廣義線性模型表示：

$$Y_{ij} = f(R_{ij}) = f(\frac{O_{ij}}{N_{ij}}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ij} \qquad (1)$$

$$i = 1,...,a,\ j = 1,..,p,\ \text{ and }\ k = 1,...,a+p-1$$

其中，$f(\cdot)$ 為死亡率 (R_{ij}) 的單調函數，O_{ij} 為第 i 個年齡組在第 j 個年代組的死亡人數，N_{ij} 為相對應的總人數，是為非隨機之固定值，a 為年齡組總數，p 為年代組總數，μ 為整體平均效應，α_i、β_j、γ_k 分別為第 i 個年齡、第 j 個年代以及第 k（$=a-i+j$）個世代的固定效應，且 $E(\varepsilon_{ij}) = 0$，$Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$。

或以對數線性模型（Loglinear Model）表示之，假設O_{ij}為卜瓦松分配，模型如下：

$$\log E_{ij} = \log N_{ij} + \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k \qquad (2)$$

其中，E_{ij}為第i個年齡組在第j個年代組的預期死亡人數，而$\log(N_{ij})$則為調整項（Offset）。

為確保效應間不會彼此混淆（Confounding），通常假設$\sum_{i=1}^{a}\alpha_i = \sum_{j=1}^{p}\beta_j = \sum_{k=1}^{a+p-1}\gamma_k = 0$。在求解時，主要的問題在於年齡、年代和世代三者呈現完全的共線性關係（年代＝年齡＋世代），因此參數估計值將有無限多組解，此即甄別問題（Identification Problem），因此無法透過唯一的參數估計值觀察死亡率或罹病率的趨勢現象。

由於 APC 模型無法求得唯一的參數估計值，因此也可採用 APC 模型的兩個二因子模型 Age-Period 模型(簡稱 AP 模型)與 Age-Cohort 模型(簡稱 AC 模型)，其模型表達如下：

AP 模型：$\log E_{ij} = \log N_{ij} + \mu + \alpha_i + \beta_j$，$i = 1,..,a, j = 1,...,p$ （3）

AC 模型：$\log E_{ij} = \log N_{ij} + \mu + \alpha_i + \gamma_k$，$i = 1,..,a, k = 1,...,(a+p-1)$ （4）

以 AP 模型為例，為得到唯一的估計值，多以$\sum_{i=1}^{a}\alpha_i = \sum_{j=1}^{p}\beta_j = 0$（或$\alpha_1 = \beta_1 = 0$）作為參數化，由於不同的參數化將有不同的估計值，導致參數估計值非唯一，因此參數估計值本身的實用價值不大，不過由於不同參數化下的配適值必定一致，因此此模型有兩項特色：

（1）一階差異（First Differences）唯一

考慮相同年齡下，第 j 與 j' 個年代組的對數死亡率之差異為 $Y_{ij}-Y_{ij'}=\log\frac{R_{ij}}{R_{ij'}}=\beta_j-\beta_{j'}$，不因參數化的不同而變動，因此有（$\beta_2-\beta_1$）、（$\beta_3-\beta_2$）$\cdots$等一階差異，且這項差異取指數後可解釋為年代組 j 與年代組 j' 的相對風險（Relative Risk），同樣的方法也可使用在年齡效應，由此觀察效應將有意義多，舉例來說，假設 $\alpha_1=\beta_1=0$，則由 $\beta_2-\beta_1(=\beta_2)$、$\beta_3-\beta_1(=\beta_3)$、$\beta_4-\beta_1(=\beta_4)\cdots$唯一可知，$\exp(\beta_2)$ 為第二年代組相對於第一年代組死亡率之比值，其餘類推。

（2）二階差異（Second Differences）亦唯一

由一階差異唯一可推出 $(\beta_3-\beta_2)-(\beta_2-\beta_1)=\beta_3-2\beta_2+\beta_1$，$\beta_4-2\beta_3+\beta_2$，$\beta_5-2\beta_4+\beta_3\cdots$等二階差異亦唯一，此即曲率測度（Measures of Curvature），二階差異為零代表在對數死亡率與年代的圖形中為一條直線，若二階差異為正或負，則分別代表凹向上(Convex)或凹向下(Concave)的關係；二階差異也可表為 $\log\frac{R_{i3}/R_{i2}}{R_{i2}/R_{i1}}$，$\log\frac{R_{i4}/R_{i3}}{R_{i3}/R_{i2}}\cdots$，即對數相對風險的比率。雖然有研究指出分析 APC 模型中應呈現二階差異，然實務上的解釋並不常用。

Clayton and Schifflers（1987)發現在配適 AP 與 AC 模型時都得到良好的結果，推測存在某種無法單一歸於年代或世代的變異，因此引進 drift 參數（δ_p,δ_c），視之為隨時間變化之參數，將 AP 模型與 AC 模型改寫為：

AP-drift 模型：$\log E_{ij}=\log N_{ij}+\mu+\alpha_i+\delta_p(j-j_0)$ （5）

其中，α_i：橫斷面的年齡效應（Cross-Sectional Age Effects）。

j_0：參考年代（Reference Period）。

δ_p：自一個年代至下一個年代對數死亡率的固定改變。

AC-drift 模型：$\log E_{ij} = \log N_{ij} + \mu + \tilde{\alpha}_i + \delta_c (k - k_0)$　（6）

其中，$\tilde{\alpha}_i$：縱斷面的年齡效應（Longitudinal Age Effects）。

k_0：參考世代（Reference Cohort）。

δ_c：自一個世代至下一個世代對數死亡率的固定改變。

以上二個模型所得之配適值是一樣的，以 AP-drift 模型為例，α_i 為在參考年代下的對數死亡率（以橫斷面的角度），且每下個年代組的死亡率會固定增加 $\exp(\delta_p)$ 倍，此外對所有年齡組而言，相對於參考年代，對數相對風險將為一條以 δ_p 為斜率的直線（即 $\log \frac{\hat{R}_{ij}}{\hat{R}_{ij_0}} = \delta_p (j - j_0)$），同理可說明 AC-drift 模型，$\tilde{\alpha}_i$ 為在參考世代下的對數死亡率（以縱向的角度），且每下個世代組的死亡率也會固定增加 $\exp(\delta_c)$ 倍，對所有年齡組而言，相對於參考世代，對數相對風險將為一條以 δ_c 為斜率的直線。

分析上，藉由 $p = a + c$ 的關係，AP-drift 和 AC-drift 模型是相同的，因此可以統稱為 Age-drift 模型，或視為 AP 與 AC 模型的交集。

第二節 估計 APC 模型參數的方法

由於 APC 模型中的甄別問題，使得參數估計值不唯一，而其中可估計的（Estimable）部分僅有二階差異，然其無法給予實務上簡易的解釋，因此，在過去的研究中，針對甄別問題的討論主要有三個方向，首先，以解決甄別問題為前提下，主要有以下四種方式：

（1）增加限制式

甄別問題的發生源於年齡、年代和世代間線性相依，數學上已證明由於 APC 模型的設計矩陣其秩（Rank）比全秩（Full Rank）少一（Kupper et al. 1983），因此最直接的作法就是增加一個限制式，而增加限制式的原則乃是根據對資料的先驗（Priori）瞭解，例如令兩鄰近的年齡、年代或世代效應的估計值相等（例如：Mason et al., 1973；Fienberg and Mason, 1985），然不同的限制式將使參數估計值有不同的變化（圖 3 為以表 1 中的資料，顯示在二種不同限制式下的參數估計值），因此對資料背景必須有詳細的瞭解，而矛盾的是，除非知道真正的參數值，否則無法確定根據額外增加的限制式所求得之參數值是否為真。

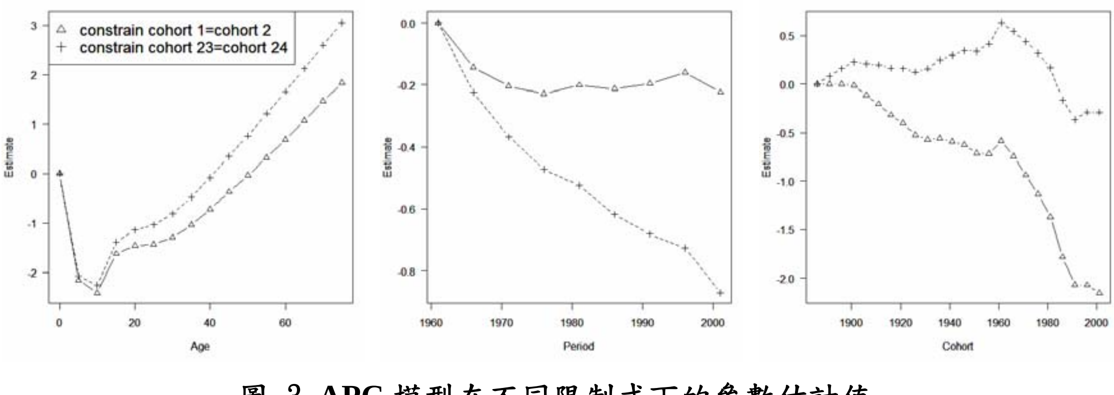

圖 3 APC 模型在不同限制式下的參數估計值

（2）懲罰函數法（Penalty Function Approach）

在增加限制式的方法中，據以的原則相當主觀，乃根據對資料背景的瞭解作人為的限制式，而 Osmond and Gardner(1982)建議增加限制式的方式必須有一項客觀的標準，於是提出使懲罰函數最小化的想法，將（1）式改寫：

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ij} \\ &= \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \lambda(j - i + a - k) + \varepsilon_{ij} \\ &= \mu + [\alpha_i + \lambda(a-i)] + [\beta_j + \lambda j] + [\gamma_k - \lambda k] + \varepsilon_{ij} \end{aligned} \tag{7}$$

假設 $\mu^*(\lambda) = \mu$ ，$\alpha_i^*(\lambda) = \alpha_i + \lambda(a-i)$ ，$\beta_j^*(\lambda) = \beta_j + \lambda j$ 和 $\gamma_k^*(\lambda) = \gamma_k - \lambda k$ ，因為 $j - i + a - k = 0$ ，所以 λ 代表的是不可甄別的參數，可視為任何值，不影響模型的配適值。定義 $\theta^T(\lambda) = (\mu, \alpha^T, \beta^T, \gamma^T)$ 為由增加限制式所產生的 APC 模型的參數向量，向量長度為 $2(a+p)-3$ ，θ_C 、θ_P 依序為 AP、AC 模型的參數向量（即 $\theta(\lambda)$ 中分別令 $\lambda = 0$ 、$\beta = 0$ ），但 θ_A 中的年齡效應以平均年齡別的死亡率為基礎，因此懲罰函數為：

$$g(\lambda) = \frac{\|\theta_A - \theta(\lambda)\|}{R_A} + \frac{\|\theta_P - \theta(\lambda)\|}{R_P} + \frac{\|\theta_C - \theta(\lambda)\|}{R_C} \tag{8}$$

其中 $\|\theta_1 - \theta_2\| = [(\theta_1 - \theta_2)^T(\theta_1 - \theta_2)]$，$R_A$、$R_P$、$R_C$ 代表衡量二因子模型的標準，如 MSE（Mean Residual Sum of Squares），最小化懲罰函數後，將所得 λ 值代回，即可求取參數估計值。但 Robertson et al.（1999）以模擬的方式說明唯有在死亡率沒有隨時間而改變的情況下，以懲罰函數法解決甄別問題才有效。

（3）無母數方法

在分析死亡率、罹病率或某些社會現象時，年代和世代效應常常是關注的焦點，未免兩者混淆，因此Tarone and Chu（1992）提出無母數的方式檢測年代和世代效應。在相同年齡組下，比較某一年代組（或世代組）至下一個年代組（或世代組）死亡率的變化，在沒有年代（或世代）效應的假設下，某一年代組（或世代組）至下一個年代組（或世代組）死亡率遞減的機率應是0.5，因此，一個

年代組（或世代組）至下個年代組（或世代組）中遞減的個數為二項式分配，其中在計算世代效應時，礙於有些世代組的個數不足，通常採取三個世代組為一組，因此計數在相同年齡組下，死亡率遞減的個數即可使用無母數檢定，得到每一年代組（或世代組）的T-value，通常T-value的絕對值大於2即為顯著。研究顯示在分離年代和世代效應的效果是不錯的，然由於年代（或世代）間的比較是建立在相同年齡下，因此無法檢定年齡效應，另外，無母數方法除了power較小外，並無法得到參數估計值。

(4)序列法（Sequential Method）

在解決甄別問題上，主要多根據模型作不同的參數化，其中如果將這三個因子的重要性依序列為年齡、世代和年代，其參數化的條件則必須滿足下列三項假設：

①年代的平均效應為零。

②世代效應應表為相對於某參考世代的相對風險。

③滿足條件①後，年齡效應應被表為在參考世代下平均年齡別的死亡率。

實際作法上，在假設③下將有複雜的迴歸方程式，且參數的標準差不易求得，因此，Carstensen(2005)建議的步驟如下：

步驟一：以 k_0 作為參考世代，配適 AC 模型，得到年齡和世代的參數估計值（$\hat{\alpha}_i, \hat{\gamma}_k$）和標準差。

步驟二：以 $\hat{\alpha}_i + \hat{\gamma}_k + \log(N_{ij})$ 作調整項配適 $\log(D_{ij}) = \hat{\alpha}_i + \hat{\gamma}_k + \log(N_{ij}) + \beta_j$ 模型，得到年代的參數估計值（$\hat{\beta}_j$）和標準差。

雖然由序列法所求得之參數值為邊際 AC 模型下的參數估計值以及在 AC 模型條件下的年代參數估計值，但與在 APC 模型下所求得之最大概似（Maximum Likelihood）估計量相差無幾。

另外，APC 模型的資料結構除了由「年代＝年齡＋世代」所造成的甄別問題外，還有世代重疊（Overlap）的現象，舉例來說，在 1981-1985 年死亡，當時年齡為 55-59 歲，其所屬世代應為 1921-1930 年；而當時年齡為 60-64 歲，其所屬世代應為 1916-1925 年，兩者在世代上重疊了五年，因此針對世代作調整，以另種角度詮釋 APC 模型的結構，將不會遭遇甄別問題，亦可求出唯一的參數估計值，主要有以下三種方式：

(1)個人資料法

APC 模型所需的資料格式有世代重疊的問題，因此 Boyle and Robertson (1986)提出將每一世代組再細分為年長世代組及年輕世代組，因此模型可以(2)式表示之，其中世代效應的指標在年長世代組為$k=a-i+j$，而對年輕世代組為$k=a\text{-}i+j+1$，如此將不會發生甄別問題，因此可得唯一的年齡、年代與世代參數估計值且不會和其他世代重疊。但這種分析需要有個人資料或是假設死亡率的分配在所屬的年齡組與年代組服從均勻分配，如此才可將世代分作兩組，有研究顯示這種方法通常在年輕世代組有低估的情形，在年長世代組則有高估的情形（Robertson et al., 1999）。

(2)自我迴歸模型（Autoregressive Model）

過去在分析 APC 模型時多將年齡、年代與世代效應視為命定式的（Deterministic），Lee（1994）將時間序列的觀點帶入 APC 模型中，Lee 認為世代效應應視為隨機性的（Stochastic），將其推廣為時間序列中的 AR（1）模型，以下式表達之：

$$Y_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_k \text{ , } \gamma_k=\phi\gamma_{k-1}+\varepsilon_k \tag{9}$$

同樣以$\sum_{i=1}^{a}\alpha_i=\sum_{j=1}^{p}\beta_j=0$為限制式，其中，$\phi$為世代效應中自我相關程度之參數，略同於一般相關係數的概念，其值介於±1 之間，然實務上，由於相鄰間世代的生活形態、文化習慣等應呈現高度的正相關，所以ϕ多大於零，ε_k為白噪音（White Noise），即$\varepsilon_k \ i.i.d.\sim N(0,\sigma^2)$。

選定世代作為穩定式（Stationary）時間序列的原因除了多數資料在年代方面的資料量較少，不足以作為時間序列分析之用，且 Lee 認為年代效應多為命定式，例如相鄰年代間死亡率的改變，多由於醫療技術的發達、科技的進步等所造成。

在求取參數估計方面，則透過最大概似方法，其中非條件概似函數分作兩個部分，一為針對 $\mu,\alpha_i,\beta_j,\gamma_k$ 的卜瓦松概似，另一為對 ϕ,σ^2 的 AR（1）概似，由於最大化非條件的概似函數並無法得到封閉解（Closed Form Solution），且無法求取世代參數估計值，因此 Lee 建議最大化條件概似函數，參數部分分作線性與非線性的部分求之，而其標準差則使用 Bootstrap 方法，研究顯示其收斂效果不錯。

(3)平滑年代模型（Smoothing Cohort Model）

對於資料筆數較少的世代，可藉由相鄰資料筆數較多的世代，調整當代世代的效應，以去除原先世代結構上的線性相依問題(Lee and Lin, 1996；Heuer, 1997；O'Brien, 2000)。因此，Fu(2007)建議透過平滑（Smoothing）函數對世代效應做局部回歸（Local Regression），想法和自我相關模型相似，相異處在於不需假設世代效應為隨機性，其模型可表為：

$$Y_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+S_{\gamma_k}+\varepsilon_{ij}\text{，}i=1,...,a,\ j=1,...,p,\ k=1,...,a+p-1 \qquad (10)$$

且 $\sum_{i=1}^{a}\alpha_i=\sum_{j=1}^{p}\beta_j=\sum_{k=1}^{a+p-1}S_{\gamma_k}=0$ ，其中 $S(\cdot)$ 為平滑函數，$S_{\gamma_k}=S(k;\gamma_1,...,\gamma_{a+p-1})$。

Fu（2007）在文中以實證分析的方式驗證了所得的參數估計值和自我迴歸模型所得之參數估計值相似。模型參數的估計採用 Hastie and Tibshirani(1990)針對廣義可加性模型（Generalized Additive Models）所提出之回溯配適演算法（Backfitting Algorithm），演算步驟如下：

步驟一：設定平滑世代效應的初始值為 0，即 $S_{\hat{\gamma}_k}=0$。

步驟二：根據 $U_{ij}=Y_{ij}-S_{\hat{\gamma}_k}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\varepsilon_{ij}$ ，配適 AP 模型。

步驟三：將殘差 $Z_{ij}=Y_{ij}-\hat{U}_{ij}$ 表為世代指標 $k=a-i+j$ 的函數，代入預先設定的平滑函數，並根據 $\sum_{k=1}^{a+p-1} S_{\gamma_k}=0$ 中心化，作為新的世代效應。

步驟四：重複步驟二、三，直到達到下式的收斂門檻為止。

$$\sqrt{\sum_i(\hat{\alpha}_i^{old}-\hat{\alpha}_i^{new})^2+\sum_j(\hat{\beta}_j^{old}-\hat{\beta}_j^{new})^2+\sum_k(S\hat{\gamma}_k^{old}-S\hat{\gamma}_k^{new})^2}\le\delta$$

步驟五：據步驟四所求得之年齡效應，設定一項限制式，例如 $\hat{\alpha}_1=c\hat{\alpha}_2$，再重新配適 APC 模型，即為所求之年齡、年代與世代效應。

Fu 也已證明平滑年代模型在有界的世代條件下，年齡、年代與世代效應的參數估計值具有一致性。

最後，過去在求解 APC 模型的過程中，有邏輯上的謬誤，多以唯一的參數估計值不存在的前提下，紛紛提出解決之道，而非先以數學上證明其唯一解不存在，進而再提出方法（Fu, 2007），而 Fu（2000）利用線性代數的方式，證明了唯一解的存在，打破之前先入為主認為唯一值不存在的觀念，因此提出了本質估計量（Intrinsic Estimator，簡稱 IE），利用向量空間投影，對模型參數估計值產生唯一解。

將（1）式轉為矩陣形式：

$Y=Xb+\varepsilon$，其中 $b=(\mu,\alpha_1,...,\alpha_a,\beta_1,...,\beta_p,\gamma_1,...,\gamma_k)^T$ （11）

任一參數向量的估計值 $\hat{b}$ 可分解成兩個正交（Orthogonal）的部分，寫作

$$\hat{b}=B+tB_0 \qquad (12)$$

其中，t 為任意實數，B 為 IE 估計值，B_0 為 X 矩陣中，對應於特徵根為 0 的特徵向量，亦即將參數向量空間 P 分解為 $P=N\oplus\Theta$，N 由 sB_0 所延展之零空間（Null Space），s 為實數，Θ 為和 N 正交的非零空間(Non-null Space)，由於 X 為奇異（Singular），因此有 $XB_0=0$，其中，且 B_0 明確的形式已由 Kupper(1985) 證出，因此將參數值投影在非零空間即可得本質估計量：

$$B=(I-B_0B_0^T)\hat{b} \tag{13}$$

本質估計量及其標準差亦可由主成分迴歸模型（Principal Components Regression）求得，步驟如下：

步驟一：計算 X^TX 的特徵向量（Eigenvectors），並正規化（Normalize）之，令其為單範正交矩陣（Orthonormal Matrix）$U=(u_1,...u_r)^T$。

步驟二：令 $u_1=B_0$，其中 B_0 為對應於特徵根（Eigenvalue）為 0 的特徵向量。

步驟三：配適一個主成分迴歸模型，以（11）式中的 Y 為反應變數，$V=(u_2,...,u_r)$ 為設計矩陣，即獲得係數 $(w_2,...,w_r)$。

步驟四：設 $w_1=0$，得到 $w=(w_1,...,w_r)^T$，乘上單範正交矩陣 $U=(u_1,...u_r)^T$ 即可獲得本質估計量，即 $B=Uw$。

綜合上述說明，每種 APC 模型求解方法各有特色（參表 2），其中有些方法在過去已有許多的研究，在此將解決 APC 模型問題的三種方向中的序列法、自我迴歸模型、本質估計量作為研究重點，首先以電腦模擬方式比較方法間的差異，接下來應用台灣地區實證資料作驗證，提供研究台灣地區死亡率趨勢的方法。

表 2 APC 模型求解方式比較

	假設條件	特色
增加限制式	廣義線性模型	‧需對樣本資料瞭解，以訂定限制式
懲罰函數法		‧訂定客觀限制式的標準
序列法	廣義線性模型＋三因子重要性的假設	‧近似最大概似估計量 ‧需對三因子的重要性具有瞭解
無母數方法		‧僅能求年代、世代效應的大小
個人資料法	廣義線性模型	‧需個人資料或假設死亡率為均勻分配
自我迴歸模型	假設世代效應為隨機性	‧世代效應為 AR（1）
平滑年代模型	廣義線性模型＋平滑世代	‧年齡、年代與世代參數具一致性 ‧對步驟五中的限制式設定需再討論
本質估計量		‧數學上的唯一解