第參章　研究方法

債券避險最常使用的工具，同時效果最好的就是利用相關的利率「期貨」來做反向操作。利用現貨與期貨間的關係，一買一賣下讓資產組合價值波動性下降，規避掉利率變動的風險。到目前為止主要的方法皆是尋求一最適避險比例（Optimal hedge ratio），讓避險組合產生最小變異為出發點，包括最小平方法、誤差修正模型、GARCH、Bivariate EC-GARCH。但是要使用上述各模型需在一些特定的前提下，並非越繁複的模型其避險效果就越佳。因此本章先探討分析資料前該做的統計檢定，再對各避險模型做介紹，最後再說明避險績效衡量。

第一節　單根檢定

經濟變數的時間序列多半不是定態（stationary）的，也就是過去發生的衝擊會一直影響以後的數據而不消失。Granger and Newbold（1974）認為若以非定態的時間序列做回歸分析，將會產生假性回歸（spurious regressions）的現象，也就是無相關的兩變數卻產生很高的R^2。所以在作實證分析前要先對資料作檢定是否為定態（單根檢定）。

所謂序列定態包括強勢定態（strictly stationary）與弱勢定態（weekly stationary）。強勢定態係指一時間序列（$X_{t1}, X_{t2}\ldots.X_{tn}$）與另一N個變量的序列（$X_{t1+k}, X_{t2+k}\ldots..X_{tn+k}$）有相同的聯合機率分配函數。也就是任一序列的機率分配不隨時間而改變。滿足強勢定態的時間序列在實務上很少見到，因此實證上都採用弱勢定態，其定義為若y_t是一定態序列，則需滿足下列三式

$$E(y_t) = E(y_{t-s}) = \mu$$

$$V(y_t) = V(y_{t-s}) = \sigma^2$$

$$Cov(y_t, y_{t-s}) = Cov(y_{t-k}, y_{t-k-s}) = \omega_s$$

其序列期望值與變異數為常數，而自我共變異數只與時間間隔有關，並不隨時間

而變。

欲檢定的序列資料若不是定態的話，要做「差分」直到定態。經過 d 次差分才定態，代表此序列有 d 個單根，稱為 I(d)（integrated of order d）。多數財務資料如股價、債券、期貨價格、外匯皆為 I(1)數列。

本研究以Said and Dickey（1984）提出的ADF（Augmented Dickey-Fuller）檢定法及Phillips and Perron（1988）提出的PP檢定法對資料序列{Y_t}做單根檢定。

(一) ADF 檢定

ADF 檢定模型為 DF（Dickey Fuller）檢定的推廣，由於 DF 的誤差項設定為 i.i.d.的假設，然而實際上誤差可能因具有序列相關的性質而無法滿足白噪音（white noise）的假設，為克服此問題，在原 DF 方程式中加入變數的落後項當作解釋變數，落後期數的選擇應使誤差滿足白噪音的假設，其估計模型有下面三種模型：

模型一：原始模型

$$\Delta Y_t = \beta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

模型二：含漂浮項之模型

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

模型三：含漂浮項及趨勢項之模型

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + \gamma t + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

上述三種模型的檢定假設皆為

$H_0 : \beta = 0$
$H_1 : \beta < 0$

若拒絕虛無假設，表示序列{Y_t}無單根現象；若無法拒絕，表示有單根現象。其檢定統計量不像一般的分配，必需查詢Dickey and Fuller所建立的臨界值分配表。本研究以模型三做單根檢定。

(二) PP 檢定

在 ADF 檢定法中，雖然已將誤差項具有序列相關的可能性考慮進去，但仍可能存在異質性（Heteroscedasticity）的問題，因此 Phillips-Perron（1988）提出 PP 檢定法來改進。該檢定讓誤差項具有相關性及異質性，且其極限分配和 DF 檢定法結果相同，因此臨界值亦可適用。PP 單根檢定法之模型如下：

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = a_0^* + a_1^* Y_{t-1} + a_2^*(t - T/2) + \varepsilon_t$$

T：觀察個數

E(ε)＝0 且允許ε_t序列相關或齊質變異存在。檢定假設為

$H_0 : a_1 = 1 \ \ (a_1^* = 1)$

$H_1 : a_1 < 1 \ \ (a_1^* < 1)$

若拒絕虛無假設，表示無單根現象。

第二節　共整合檢定

Nelson and Plosser（1982）認為以差分後的定態序列進行分析時，往往會消除變數間隱含的長期資訊，僅留下短期訊息，這將使得變數間的動態關係設定錯誤，進而產生不當的結論。因此Engle and Granger（1987）提出共整合（Cointegration）觀念，即在避免差分後的缺點。他們指出，即使個別經濟變數

是依循隨機漫步的過程，但若變數間存在共整合關係時，則這些變數的線性組合在長期內必藉由短期的動態調整，而回復至長期的均衡水準。

共整合定義為：假設 X 為一 I(1)的序列，而 Y 亦為一 I(1)的序列，當存在一常數a，使 Z(t)＝Y－aX 為一 I(0)的序列時，則稱序列X與Y間存在共整合關係，此時稱 a 為共整合係數，Z(t) 為共整合向量。例如期貨與現貨價為I(1)的時間數列，若彼此有共整合關係，則其線性組合後均衡誤差會變為I(0)的序列。若變數間存在共整合現象，使用傳統 OLS 估計將會產生誤差。

本研究使用Engle and Granger提出的兩階段共整合檢定法（EG test）。第一階段先分別替變數{Y_t}、{X_t}做單根檢定，確定欲測變數皆為I(1)的時間序列。再利用OLS估計共整合迴歸式：$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$，根據估計出的$\alpha$、$\beta$求得誤差項估計值{$\varepsilon_t$}。第二階段為檢定誤差項{$\varepsilon_t$}是否有單根現象，若為I(0)定態序列，表示兩變數間存在共整合關係。本研究以ADF檢定是否有單根現象。

$$\Delta\varepsilon_t = \gamma\varepsilon_{t-1} + \sum_{t=1}^{p}\Delta\varepsilon_{t-1} + u_t$$

第三節　條件異質變異檢定

一般傳統模型皆假設誤差項的變異數為一常數，不會隨時間或資料改變而變動。但是在實證上卻往往出現變異數並非固定不變，經常有叢聚（cluster）的情況，即某段時間變異數特別大，某段時間內又特別小。所以在使用異質變異模型如 ARCH、GARCH 前，要先檢定其資料序列是否滿足異質變異的條件，如此才適合使用。本研究以二種方式檢定異質變異，包括 Ljung-Box（1978）之 Q 統計量以及 Engle（1982）之 LM 檢定。

(一) Ljung-Box Q 統計量

Box and Jenkin（1976）所提出，檢定步驟如下

1.利用OLS估計{Y_t}的最適 ARMA(p,q) 模型，得其估計誤差項之平方$\left\{\varepsilon_t^2\right\}$，並計算其樣本變異數

$$\sigma^2 = \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2 \Big/ T$$

其中 T：誤差項個數

σ^2：樣本變異數

2.計算樣本誤差平方項的自我相關係數

$$\rho(i) = \frac{\sum_{t=i+1}^{T} (\varepsilon_t^2 - \sigma^2)(\varepsilon_{t-i}^2 - \sigma^2)}{\sum_{t=1}^{T} (\varepsilon_t^2 - \sigma^2)^2}$$

3. 在大樣本下，ρ(i)的標準差將趨近$T^{-1/2}$。若任一ρ(i)顯著異於零，表示存在異質變異。Ljung-Box Q 統計量表示如下：

$$Q = T(T+2)\sum_{i=1}^{n} \rho(i)/(T-i)$$

Q統計量會趨近自由度n的χ^2分配，若大於檢定統計量，則表示拒絕虛無假設，此序列有異質變異的情形。

(二) Lagrange Multiplier檢定

Engle提出的LM檢定，可檢定是否存在ARCH效果，檢定步驟如下：

1. 利用OLS估計{Y_t}的最適AR(p)模型，並求得誤差項平方$\left\{\varepsilon_t^2\right\}$

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \cdots + a_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

2. 將誤差項平方對常數與 q 階落後項進行迴歸

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$$

若存在ARCH效果，則α_0到α_q的估計值應會顯著於 0，迴歸式的判定係數R^2會

很高。其檢定統計量TR^2近似自由度q的χ^2，若TR^2夠大，則表示存在ARCH效果。

第四節　　稳定性檢定

利用迴歸模型所求出的參數值經常被視為一定數，也就是不會隨著時間而變動。但對於時間序列的資料而言，若樣本期間很長，則資料面臨結構性改變的機率就越高。尤其當遭遇經濟衝擊時，序列本身的穩定性即面臨考驗。因此，在分析資料時須加入穩定性檢定，以確保估計出的參數是有效率的。本研究以Chow test（1960）做穩定性檢定。

Chow 認為以一個線性迴歸式來表達一段期間內數個經濟變數間的關係時，可檢定這一段期間分割為不同的子期間後，變數間的關係是否仍然是穩定的。若不同期間內變數的關係不變時，迴歸的殘差平方和應相同，並以此判定無結構性的變化。Chow test 的檢定步驟如下：

1. 先計算整個樣本下的迴歸誤差（RSS），再將樣本分割為兩個期間，個別計算其迴歸誤差（RSS_1、RSS_2）。
2. 計算其檢定統計量

$$\frac{RSS-(RSS_1+RSS_2)}{RSS_1+RSS_2}\times\frac{T-2k}{k}\sim F\left(k,T-2k\right)$$

RSS：residual sum of squares for whole sample

RSS_1：residual sum of squares for sub-sample 1

RSS_2：residual sum of squares for sub-sample 2

T：樣本數

k：迴歸參數個數

若兩期間無結構性改變，則分開計算的迴歸誤差和與整個樣本的迴歸誤差應該差不多，檢定統計量就會很小，無法拒絕。若有結構性改變，檢定值則會很大。

第五節　最小平方法（OLS）

傳統的避險方式認為現貨與期貨變動幅度相同，所以避險比例為1的情況下即可規避風險，此即單純（naive）避險模式。但實際上現貨與期貨變動量並不完全一致，尤其是交叉避險下。因此Johnson（1960）、Stein（1961）利用Markowitz的投資組合理論，利用期貨與現貨建構一避險組合以追求報酬風險極小化。

假設避險者在第t-1期擁有1單位之現貨部位（價格S_{t-1}），並決定於第t期賣出（價格S_t），則未避險現貨部位之預期報酬與變異數分別為$E(\Delta S_t)$、$V(\Delta S_t)$。若避險者於第t-1期賣出b單位的期貨部位進行避險，則避險投資組合之預期報酬與變異數分別為

$$E(R) = E(\Delta S_t) - bE(\Delta F_t)$$

$$Var(R) = Var(\Delta S_t) - 2bCov(\Delta S_t, \Delta F) + b^2 Var(\Delta F_t) \qquad (3\text{-}1)$$

R：避險組合

S：代表現貨

F：代表期貨

b：避險單位

在風險極小化下對式(3-1)之b一階微分，並令方程式為零，即得到最小變異下的避險比率為

$$b^* = \frac{Cov(\Delta S_t, \Delta F_t)}{Var(\Delta F_t)}$$

Witt（1987）提出三個OLS模型以估計最適避險比例，包括價格型態、價差型態、報酬率型態。差別即在於以何種資料帶入OLS模型。一般因價格多屬非定

態序列，易造成估計式呈現偏誤與不一致性，故並不適用來估計。價差與報酬型態多為定態序列，所以比較適用來估計。若是現貨與期貨呈線性關係時，則採價差模式較適當；若是非線性時，採報酬率模式較適當。本研究為交叉避險，現貨與期貨非同一商品，故使用報酬率型態較恰當。

第六節　誤差修正模型（Error-Correction Model）

Engle 與 Granger（1987）認為許多經濟變數具有長期均衡的現象（收斂到一水準），但是在差分下的模型會消去此訊息，導致估出來的避險比例是不合適的。例如回歸式 $\Delta S_t = \beta \Delta F_t + \varepsilon_t$，若長期下 S 與 F 皆收斂到一水準時，差分後的數據會等於 0，此時估計的 β 就無意義了。

他們認為兩變數間存在此長期均衡關係（或稱共整合）時，則這些變數的線性組合在長期內必藉由短期的動態調整，而回復至長期的均衡水準。若在回歸模型中加入一誤差修正項（S_{t-1}－F_{t-1}）將使模型估計更完整。本研究加入誤差修正項的模型為參考Ghosh（1993）的設定

$$\Delta S_t = \beta_0 + \beta_1 \Delta F_t + \beta_2 (\ln S_{t-1} - \gamma \ln F_{t-1}) + \sum_{i=1}^{m} \theta_i \Delta S_{t-i} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Delta F_{t-j} + \varepsilon_t$$

$\Delta S_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$現貨報酬率

$\Delta F_t = \ln F_t - \ln F_{t-1}$期貨報酬率

γ：共整合係數

β_1：避險比例

β_2；誤差修正係數

θ_i、λ_j：落後參數

式中包含現貨、期貨價差的落後項及誤差修正項，使得此一避險模型同時納入長期靜態及短期動態的關係。其中現貨、期貨價差的最適落後期數，本研究以Akaike

Information Criterion（AIC）準則所決定。內涵為若模型加入沒解釋能力的變數時，會使AIC值提高。故選取最適落後其數的準則為挑選AIC值最小的。

$$AIC = T \times \ln(RSS) + 2N$$

T：觀察值個數

N：估計參數個數

第七節　GARCH(1,1)

傳統OLS模型是假設誤差項的變異數是一常數，不隨時間而改變。但實際上，許多財務資料不是常態分配，而是具有偏態（skewness）及峰態（kurtosis），且誤差項變異數也非固定不變，而會隨著時間的經過而改變。這些均可能是由ARCH效果引起的，因此需對傳統模型做調整，以更符合實際狀況。

Engle（1982）提出ARCH（AutoRegessive Conditional Heteroscedasticity）模型，允許條件變異數隨著時間的經過而改變，並且是過去誤差項平方的函數。ARCH(p)模型如下：

$$S_t = \beta_0 + \beta_1 F_t + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

$$\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

Ω_{t-1} 表示在t−1期所有可利用的資訊集合，σ^2為時間序列S_t之條件變異數，參數α_i代表前幾期的誤差項對當期變異數的影響。此模型的缺點是當期數 p 過多時，需估計的參數太多，會降低檢定效率。Bollerslev（1986）將ARCH模型加以擴展，提出一般化自我迴歸條件變異數（Generalized ARCH）模型，此模型允許條件變異數不僅受到前期誤差項平方所影響，也會受到前期條件變異數所影響，

GARCH(p,q)模型如下：

$$S_t = \beta_0 + \beta_1 F_t + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \sigma_{t-i}^2$$

$$\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

由於 GARCH(1,1)即有良好的解釋能力，所以本研究以此模型進行實證研究。

$$\Delta S_t = \beta_0 + \beta_1 \Delta F_t + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \varepsilon_{t-1}^2 + \sigma_{t-1}^2$$

$$\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

ΔS_t：現貨報酬率

ΔF_t：期貨報酬率

β_1：避險比例

σ^2：條件變異數

上式經過最大概似法（MLE）可求得避險比例。

第八節　Bivariate EC-GARCH

Engle、Bollerslev and Wooldridge（1988）認為現貨與期貨間若存在聯合常態分配時，僅使用單變量GARCH模型並不能完整表現出異質變異的特性，因此提出多變量GARCH模型。Baillie and Myers（1991）首先利用雙變量模型對不同商品做驗證，得到良好的避險效果。之後Kroner and Sultan（1993）更加入誤差修正項，使模型同時反應共整合與異質變異的特性。其模型設定如下：

$$\Delta S_t = \alpha_0 + \alpha_1(\ln S_{t-1} - \gamma \ln F_{t-1}) + \varepsilon_{s,t}$$

$$\Delta F_t = \beta_0 + \beta_1(\ln S_{t-1} - \gamma \ln F_{t-1}) + \varepsilon_{f,t} \quad , \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{s,t} \\ \varepsilon_{f,t} \end{pmatrix} | \Omega_{t-1} \sim N(0, H_t) \quad (3\text{-}2)$$

$$H_t = \begin{pmatrix} h_{s,t}^2 & h_{sf,t} \\ h_{sf,t} & h_{f,t}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{s,t} & 0 \\ 0 & h_{f,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{s,t} & 0 \\ 0 & h_{f,t} \end{pmatrix} \quad (3\text{-}3)$$

$$h_{s,t}^2 = c_s + a_s \varepsilon_{s,t-1}^2 + b_s h_{s,t-1}^2$$

$$h_{f,t}^2 = c_f + a_f \varepsilon_{f,t-1}^2 + b_f h_{f,t-1}^2 \quad (3\text{-}4)$$

ΔS_t：現貨報酬率

ΔF_t：期貨報酬率

H_t：共變異數矩陣

ρ：現貨與期貨報酬率的相關係數

(3-2)式代表現貨與期貨價格變動的過程，其誤差項滿足期望值為0，變異數為條件變異的聯合常態分配。(3-3)式表示條件變異的結構。(3-4)式表示雙變量GARCH(1,1)。

透過最大概似法之估計，可求得避險比例為

$$b^* = \frac{h_{sf,t}}{h_{f,t}^2}$$

其條件變異數與條件共變數會因新資訊而每期不同，避險比例也會隨時間而變動。

第九節　避險績效衡量

本研究依 Johnson 的風險極小化定義作為績效衡量指標。以樣本內的避險比例用在樣本外資料，看經過避險後整體報酬變異數是否降低。若避險效果（HE）

值越高代表避險效果越佳。

$$HE = \frac{Var(S) - Var(H)}{Var(S)}$$

HE：避險效果

H＝S－βF：避險組合的報酬率

S：公債報酬率

β：避險比例