第三章　資產負債模型的建構

本研究為討論資產配置的議題，希望在到期日時資產總值能達到負債總值，因此，資產與負債模型的建構就顯得格外重要，我們接著就分別討論資產總值與負債總值的模型建構。

第一節 負債模型

為了因應不同的負債型態，資產的配置勢必會作適當的調整，因此，負債的選擇型態對於投資組合的結果有直接的影響。在實際市場中，由於每個人對於風險的接受程度不同，市場上也提供各種不同類型的投資商品，例如：有些主要是提供追求穩定收益的投資者，像是債券型基金；有些則是跟某種指數連結型的商品，它們的價格漲跌跟它所跟隨的指數漲跌有密切的關係；甚至也有最低保證型的商品，如最低保證報酬率之連動型債券。因此本文也以此概念為基礎，選擇四種較一般化的負債型態為主要探討的對象。

(一)型態一：負債以固定比例成長($L(n)=(1+r)^n$)

此種型態的負債，每期是以固定百分比的成長。此一類別的負債型態是提供給期望平均之報酬為固定水準的投資者作為選擇，例如：某投資者希望他的投資能在未來 n 年內每年平均有 5%之報酬率，則可選擇此類負債型態，將 r 設為 5% 即可。

(二)型態二：負債以物價指數成長（ $L(n)=\prod_{t=1}^{n}\{1+inflation\ rate(t)\}$ ）

此種型態的負債，是考慮每年的負債成長以某一指數成長，本研究所採用的是物價指數，相較於前一種型態以固定比例成長，此種型態以較實際的通貨膨

脹為負債成長率，因此選擇這類型態的負債，主要是因應通貨膨脹，防止其資金縮水而作資產配置，此外亦可選擇其他指數，像是股價指數或地價指數，可依投資者所需自行選擇。

(三)型態三：負債之成長率為物價指數與一固定比例之較小者

$$(L(t) = L(t-1)\times \min\{(1+r),(1+inflation\ rate(t))\})$$

第三種型態是比較一個限制利率(1+r)與物價指數的大小，而選擇兩者間較小的為負債成長，例如：若 r 取 5%，而當年度物價指數為 1.06 時，則以 1.05 為當年度之負債成長，反之如果物價指數為 1.03 則選擇 1.03 為負債成長。此類型之應用如英國 LPI(limited price indexation)，其主要用意是希望負債的成長不要太大，當通貨膨脹率超過某一標準時，則以此標準為負債之成長。

(四)型態四：負債之成長率為物價指數與一固定比例之較大者

$$(L(t) = L(t-1)\times \max\{(1+r),(1+inflation\ rate(t))\})$$

第四種則與第三種相反，選擇限制利率與物價指數中較大的為負債成長。這類的負債則是應用於每年有最低保證報酬率之投資，在市面上也較常見，應用之層面也較廣泛，例如有些不考慮與物價指數相比較，而以股票指數連結(equity-link)，另外乘上一參與率 b 作為比較對象，亦即 $L(t) = L(t-1)\times \max\{(1+r),(1+b\times equity\ return\ rate(t))\}$。

第二節 資產模型

資產的選擇當然對於投資決策有很大的影響，Brennan, Schwartz & Lagnado (1997)的資產配置模型是以股票、永續債券及現金為投資標的。Boyle & Yang (1997)將退休基金投資於股票、債券及貨幣市場。而本文將選擇 Wilkie (1995)

投資模型中的其中四種投資標的，分別是短債(short-term bonds)、永續債券(consols)、指數連結型債券(index-linked gilts (ILG))及股票(equity)，這四種資產也較常應用於長期投資的計畫中，而且可藉由此模型模擬出相關之報酬率，容易獲得較為整體性的資料。接著我們開始討論資產模型。

首先我們定義下列:

P_{ij} ：第 i 次資產再調整時 j 資產應該的持有比例

其中，j=1 為 short-term bonds，j=2 為 consols，

j=3 為 index-linked gilts(ILG)，j=4 為 equity

T_i ：第 i 次資產再調整(rebalance)時的時間(年)

$A(0)$ ：期初投入的資金

$A(T_i)$ ：第 i 次資產再調整時的總資產值

$A(n)$ ：期末到期日的總資產值

$Y_j(T_i)$ ：第 i 次資產再調整時，j 資產的累積報酬率

所以，在經過了 i 次資產再調整的總資產值如下所示

$$A(T_i) = A(T_{i-1}) \times \left[\sum_{j=1}^{4} (P_{ij} \times \frac{Y_j(T_i)}{Y_j(T_{i-1})}) \right]$$

假設到期日($T = n$)時，我們做了 r 次資產再調整，則：

$$
\begin{aligned}
A(n) &= A(T_r)\times\left[\sum_{j=1}^{4}\left(p_{rj}\times\frac{Y_j(T_r)}{Y_j(T_{r-1})}\right)\right] \\
&\approx A(T_r)\exp\left[\sum_{j=1}^{4}(P_{rj}\times\ln(\frac{Y_j(T_r)}{Y_j(T_{r-1})}))\right] \\
&= A(T_1)\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{4}\left(\frac{Y_j(T_{i+1})}{Y_j(T_i)}\right)^{P_{ij}} \\
&= A(0)\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{4}\left(\frac{Y_j(T_{i+1})}{Y_j(T_i)}\right)^{P_{ij}} \qquad (式3\text{-}1)
\end{aligned}
$$

其中 $A(T_1)$ 代表第一次資產再調整時的資產總值，亦即期初投入的資金 $A(0)$

令 $k_{ij}=\dfrac{Y_j(T_{i+1})}{Y_j(T_i)}$

則 $A(n)=A(0)\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{4}\left(k_{ij}\right)^{P_{ij}}$ (式 $3\text{-}2$)

第三節 目標函數

本文討論資產配置的問題，希望到期日時資產總值能達到負債總值。其中，資產的累積是考慮在投資計畫開始時投入一筆資金，將資金投資在四種投資標的上，分別是短債(short-term bonds)、永續債債(consols)、指數連結型債券(index-linked gilts(ILG))、股票(equity)，之後則是在固定時間調整投資標的的持有比例，直到計畫結束為止。而我們採用的方法是先模擬出 m 筆 n 年的四種投資標的年報酬率以及負債年成長率。而每一筆資料代表一種實際經濟情況，利用這些資料可得到 m 種情況期末(n 年後)的負債累積總值 $L(n)$ 以及在特定決策下的資產累積總值 $A(n)$，在我們考慮的模型中，目標是希望找到期初投入的資

金以及每年各個資產重新調整(rebalance)的比例，使得模擬的 m 筆資料所計算出的期末總資產與總負債的差距達到最小。

如果化成數學式來看，我們模擬了 m 筆資料，我們希望資產與負債差距最小，因此目標函數為：

$$\min \sum_{k=1}^{m} \{[A^{(k)}(n)] - [L^{(k)}(n)]\}^2$$

其中 $A^{(k)}(n)$ 代表利用第 k 筆資料，到期日(n 年後)的資產總值

$L^{(k)}(n)$ 代表利用第 k 筆資料，到期日(n 年後)的負債總值

在資產總值的模型建構中，我們將資產累積總值 $A(n)$ 化為一個具有指數的連乘式，這樣的作法有個好處，當在(式 3-2) 等號兩邊同取對數之後，結果如下:

$$\ln A(n) = \ln A(0) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{4} P_{ij} \ln k_{ij} \qquad (\text{式}3\text{-}3)$$

變成一個 P_{ij} 的線性組合，因此我們可重新考慮我們的目標函數。由於我們希望達到 $A(n)$ 與 $L(n)$ 的差距越小越好，可看作 $\frac{A(n)}{L(n)} \to 1$，也就是 $\ln(\frac{A(n)}{L(n)}) \to 0$。所以，我們可把原來的目標函數改成：

$$\min \sum_{k=1}^{m} \{\ln[A^{(k)}(n)] - \ln[L^{(k)}(n)]\}^2$$

這樣的目標函數與原來的目標函數具有相同的效果，在求解上有相當便利之處，原因是可將目標函數簡化為一般化最小平方法(generalized least square,GLS)的問題，大大的提升求解的速度與精確程度。

再者，我們發現取自然對數的另一個好處在於能獎勵資產大於負債而有盈餘的情況。舉例來說，如果同樣都考慮負債 L(n)=100，在取自然對數的模型中，資產 A(n)=20 與 A(n)=500 兩者有相同的誤差值$[\ln A(n)-\ln L(n)]^2$；但如果我們不考慮取自然對數時，資產 A(n)=20 與 A(n)=180 才具有相同的誤差值 $[A(n)-L(n)]^2$，所以可以發現，如果同樣的不足額水準下 A(n)=20，取自然對數模型下達到盈餘的資產 A(n)=100 遠大於不取自然對數的模型 A(n)=180，這也表示模型間接鼓勵了資產大於負債的情形。