第四章　單期挹注資金模型

一般投資計畫可分為單期挹注資金與多期挹注資金，單期挹注資金僅在期初時投入一筆資金，其後只調整其投資標的比例，實際應用上，如單筆申購的方式購買基金或一般公司的投資計畫，此類投資計畫之投資人可承受的風險較高，可一次投注較多的金額;而多期挹注資金的計畫則是在投資計畫期間將資金分次投入，較常應用於長時間的投資計畫，而每次投資的金額較少，如退休金計畫或者以定時定額的方式購買基金。此類投資計畫，可按時將資金投入，一段時日後可累積一筆可觀資金。本章將先探討單期挹注資金的計畫，多期挹注資金的計畫將在下個章節介紹。

第一節 單期挹注資金模型建構

在先前資產負債模型建構下，我們先考慮只在開始投入一筆資金的問題。我們考慮期間為 n 年，模擬出 m 筆資料，定期作資產比例的調整，於 n 年內共調整 r 次，其相關的時點如下圖所示：

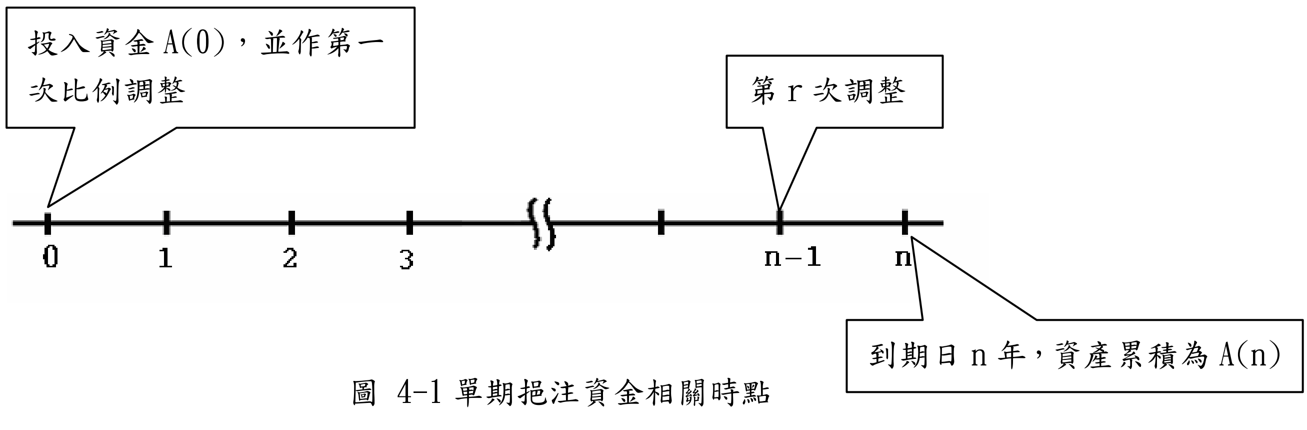

圖 4-1 單期挹注資金相關時點

從第 0 年投入資金並調整比例,之後 1~ n-1 的每個時間點都作資產再調整，

而資產再調整的次數可隨意設定，假若我們考慮每年作一次資產再調整的話，則 r=n，若每半年作一次資產再調整，則 r=2n，……。而我們希望找出期初應該投入多少資金 A(0)，以及每年該如何作資產再調整，使得最後能達到負債的要求，亦即

$$\min_{A(0),p_{ij}} \sum_{k=1}^{m} \{\ln[A^{(k)}(n)] - \ln[L^{(k)}(n)]\}^2$$

$$\text{subject to } \sum_{j=1}^{4} P_{ij} = 1 \text{ 且 } 0 \le P_{ij} \le 1 \quad \forall i = 1.2....r, \forall j = 1...4 \quad \cdots \text{(a)}$$

其中 $\ln[A^{(k)}(n)] = \ln A(0) + p_{11}\ln k_{11}{}^{(k)} + p_{12}\ln k_{12}{}^{(k)} + ...p_{r,4}\ln k_{r,4}{}^{(k)}$

$$= \ln A(0) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{4} P_{ij} \ln k_{ij}{}^{(k)} \quad \cdots \text{（式 4-1）}$$

而 $\ln k_{ij}{}^{(k)}$ 與 $\ln[L^{(k)}(n)]$ 是模擬的值，可視為已知的常數，$(\ln A(0), p_{11}, p_{12}, ...p_{r4})$ 為決策變數，也就是最終期望獲得的投資決策。

第二節 參數設定與資料來源

接著我們可發現，我們的目標函數是極小化一個多變量的二次函數(quadratic equation)，更明確的說法應該是解一般化最小平法的問題，亦即可化為下列(b)形式

$$\min_{x} \frac{1}{2}\|Cx - d\|_2^2 \quad \text{subject to} \quad \begin{matrix} A \cdot x \le B \\ Aeq \cdot x = Beq \\ lb \le x \le ub \end{matrix} \quad \cdots \text{(b)}$$

這類的問題在許多應用程式中都是相當容易解決的，而我們使用 Matlab 軟體，採用 Optimization Toolbox 中的 lsqlin 指令，其目的在求出具有條件限制下達到最小平方的解，選擇 Matlab 軟體的原因在於，lsqlin 所採用之演算法是基於二次規劃法（Quadratic Programming ），採用有效集合（active set）方式處理，這樣的方法 Gill, Murray, and Wright (1981)表示具有唯一解且是較有效率的演算法。

接著利用 Wilkie 投資模型模擬出相關資料，我們取 m=4000，n=10(r=10)。模擬出 4000 筆連續 10 年的四種投資標的的年報酬率以及負債成長率，利用模擬出的資料，我們可以得到 $\ln k_{ij}^{(k)}$ 以及四種不同型態的負債年報酬率，而四種不同型態的負債中，r 取 0.05。因此，第一種型態固定的比例成長為 1.05；第三種型態為 $\min\{1.05,(1+r_t)\}$，第四種型態為 $\max\{1.05,(1+r_t)\}$，並計算出四種型態下的 $\ln[L^{(k)}(10)]$。所以我們藉由這些模擬的值，可以分別得到滿足目標函數(b)中的 C 與 d

$$C=\begin{bmatrix} 1 & \ln k_{11}^{(1)} & \ln k_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \ln k_{10,4}^{(1)} \\ 1 & \ln k_{11}^{(2)} & \ln k_{12}^{(2)} & \cdots & \cdots & \ln k_{10,4}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \ln k_{11}^{(4000)} & \ln k_{12}^{(4000)} & \cdots & \cdots & \ln k_{10,4}^{(4000)} \end{bmatrix}_{4000\times 41} \qquad d=\begin{bmatrix} \ln L(10)^{(1)} \\ \ln L(10)^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \ln L(10)^{(4000)} \end{bmatrix}_{4000\times 1}$$

而我們限制條件考慮 $Aeq\cdot x=Beq$ 與 $lb\le x\le ub$ ，其中 $Aeq\cdot x=Beq$ 代表解空間具有線性等式的關係，亦即滿足 $\sum_{j=1}^{4}P_{ij}=1$，$\forall i=1.2....10$，而 $lb\le x\le ub$ 代表解空間有限制範圍。故 Aeq 、 Beq 、 lb 與 ub 分別可以表示成：

$$
Aeq=\begin{pmatrix} 0 & 1_4 & 0_4 & 0_4 & \cdots & 0_4 \\ 0 & 0_4 & 1_4 & 0_4 & \cdots & 0_4 \\ 0 & 0_4 & 0_4 & 1_4 & \cdots & 0_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0_4 & 0_4 & 0_4 & \cdots & 1_4 \end{pmatrix}_{10\times 41} \quad 其中\ \ 1_4=(1,1,1,1)，0_4=(0,0,0,0)
$$

$$
Beq=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{10\times 1}，lb=\begin{pmatrix} -Inf \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{41\times 1}，ub=\begin{pmatrix} Inf \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{41\times 1}
$$

因為 lnA(0)的範圍不確定，所以我們給定第一項$-Inf \le \ln A(0) \le Inf$ ，其中 Inf 與$-Inf$ 分別代表無限大與負無限大

接下來我們將分兩種情況探討，首先是不考慮限制$0 \le P_{ij} \le 1$，亦即允許買賣空的情況發生，所求出的解也就是理論的最佳解，我們也可以藉此與之前的研究加以比較。另外則是考慮增加$0 \le P_{ij} \le 1$的限制，亦即不允許買賣空的情況，我們也將比較兩者差異與影響。

第三節 數值結果與分析

經過前一節將 lsqlin 中所需的參數設定完成後，就可執行將最適資產配置求出，我們分別比較四種不同型態的負債之下，限制$0 \le P_{ij} \le 1$與不限制兩者差距為何。其結果如下：

（一）最適投資比例

各型態下之最適資產配置可參考附錄二，為比較有無條件限制下的結果，我們將其描繪成圖形介紹。

（1）型態一 $L(10)=(1.05)^{10}$

型態一之最適投資比例如下所示：(左圖為無限制 $0 \le P_{ij} \le 1$，右圖採限制條件)

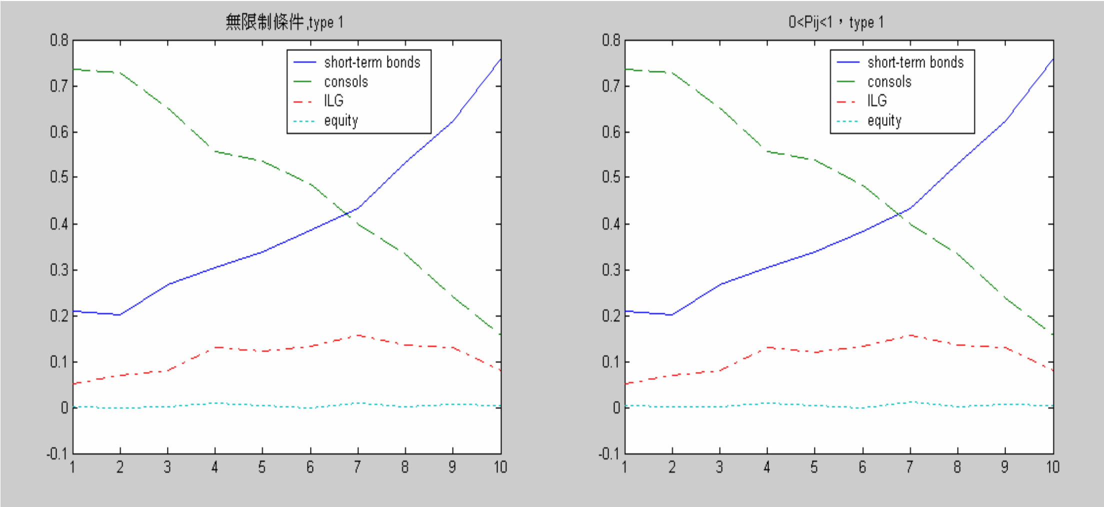

圖 4-2 type 1

從(圖 4-2)左半部看出，當我們不考慮投資比例的限制 $0 \le P_{ij} \le 1$，其結果與 Huang (2004)的研究結果幾乎完全相符，差距小於 10^{-6}，所以本文以一般化最小平方法的方式解決，其精確度上並無太大問題。而由於型態一發生買賣空的現象並不明顯，因此在考慮限制條件時，其結果並無太大差異。在此我們也可以發現，負債以每年固定成長的型態下，永續債券(consols)是投資組合中最重要資產，在期初投資比例可以高達七成以上，其次則以短債(shot-term bonds)為主，大約兩成，而股票(equity)與指數連結型債券(ILG)持有比例都相當少，有這樣的結果原因在於債券具有固定的報酬率且風險也較低，因此為了達到固定成長負債的要求所以會選擇持有較有固定報酬率的債券。隨著時間接近到期日，會逐漸的提高變現較容易的短債比例，以減少流動風險。我們接著討論第二種負債型態。

（2）型態二 $L(10)=\prod_{t=1}^{10}\{1+r_t\}$

型態二之最適投資比例如下所示：

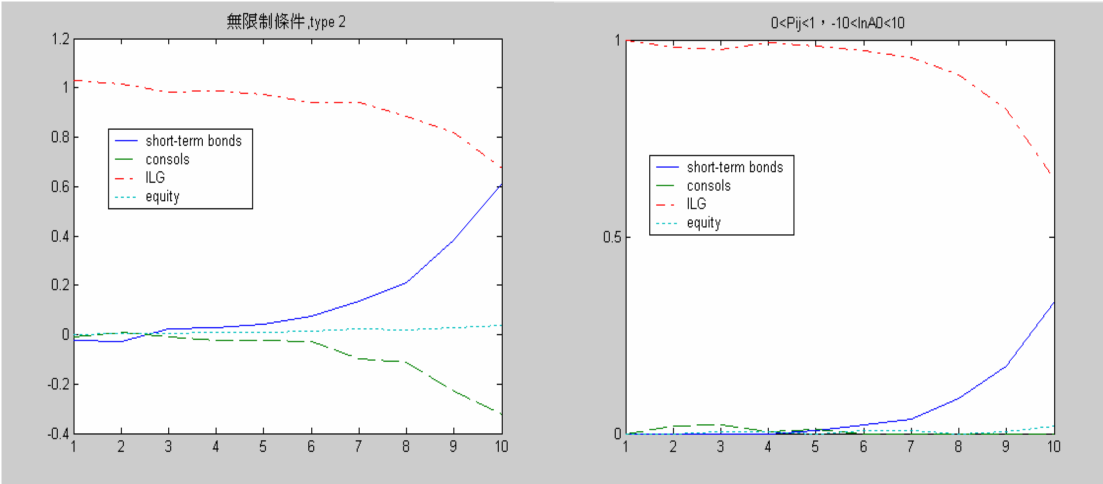

圖 4-3　type 2

從(圖 4-3)左半部可以看出，當負債是隨著物價指數波動的型態下，當不考慮限制時，除了股票持有的比例大約都維持在 0 外，其他三種投資標的都有些許買賣空現象，特別是在期初持有比例則會集中在資產隨指數波動的指數連結型債券(ILG)上，且持有的比例相當高甚至在期初會選擇全部集中在此種資產上，之後在逐漸提高短債的比例，甚至到了期末會放空長債，而將比例集中在指數連結型債券以及短債上。其次是考慮加入限制條件$0\le P_{ij}\le 1$時，原先小於零的部分都趨近於零，大於零的部分也都在限制範圍內。在比較雙方結果可看出，兩者指數連結型債券及短債的比重都很高，雖然在考慮限制條件後持有比例會略為調整，但仍保持原先的趨勢。而兩者差異在於短債持有比例到期末增加的情況不如先前來的多，而這也使得期末累積總資產變多或變少，間接造成追蹤誤差的增加。

以上兩種型態的結果是可以預期的，如果想要達到資產與負債最近似的結果，勢必會選擇最接近負債現金流量的資產來作投資。

(3) 型態三與型態四

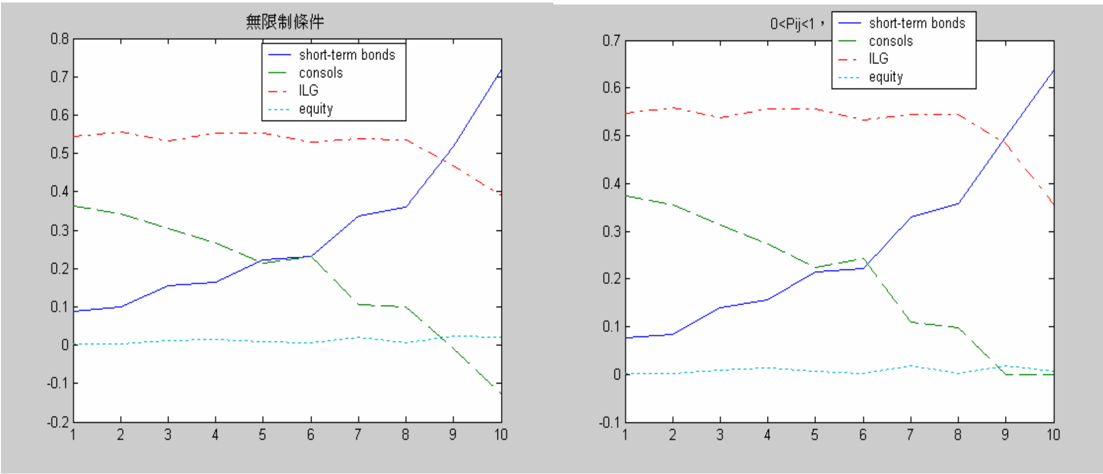

圖 4-4　<u>type 3</u>　$L(t)=L(t-1)\times\min\{(1.05),(1+r_t)\}$

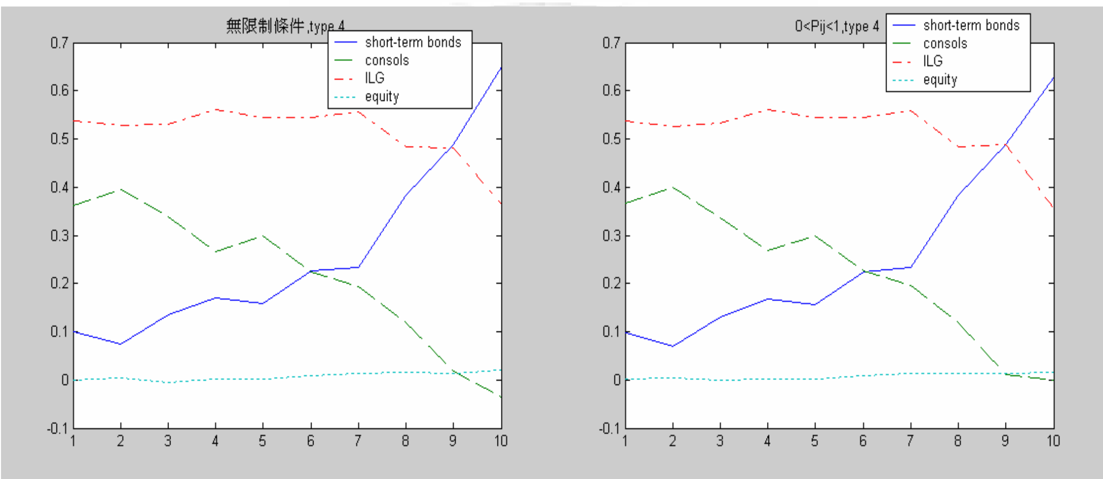

圖 4-5　<u>type 4</u>　$L(t)=L(t-1)\times\max\{(1+r),(1+r_t)\}$

從(圖 4-4)與(圖 4-5)可以看出兩者的投資組合相當類似，且兩者各資產比例的分佈都介於型態一與型態二之間，其原因在於型態三與四的負債是前兩者的組合有關。而型態三與四的差別在於型態四期初投入的金額較高於型態三。

先前我們將資產模型化為連乘形式的近似值(approximation)，接下來探討我們採用資產模型的近似值與未採用資產模型近似值的差異。首先利用 Wilkie

所模擬的資料求出未近似的資產累積值:

$$
\begin{aligned}
A(n) &= A(T_r)\times\left[\sum_{j=1}^{4}\left(p_{rj}\times\frac{Y_j(T_r)}{Y_j(T_{r-1})}\right)\right]\\
&= A(T_{r-1})\times\left[\sum_{j=1}^{4}\left(p_{r-1j}\times\frac{Y_j(T_{r-1})}{Y_j(T_{r-2})}\right)\right]\times\left[\sum_{j=1}^{4}\left(p_{rj}\times\frac{Y_j(T_r)}{Y_j(T_{r-1})}\right)\right]\\
&= \ \vdots\\
&= A(0)\times\prod_{i=1}^{10}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(p_{ij}\times\frac{Y_j(T_{r-i+1})}{Y_j(T_{r-i})}\right)\right] \qquad (\text{式}\,4\text{-}2)
\end{aligned}
$$

而近似總資產為:

$$
A(n) = A(0)\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{4}\left(\frac{Y_j(T_{i+1})}{Y_j(T_i)}\right)^{p_{ij}} \qquad (\text{式}\,4\text{-}3)
$$

我們將各種型態下負債所求出的最佳解代回求出未近似的資產累積值，即利用(式 4-2)求出總資產記為 $A(n)_T$，同樣的我們將最佳解代入(式 4-3)中求出近似的總資產記為 $A(n)_A$，接著計算出兩者的誤差 $\left|A(n)_T - A(n)_A\right| / A(n)_A$，並求此 4000 筆資料的平均，結果如下:

型態	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
無限制	1.1368 %	0.44826 %	1.3922 %	1.416 %
$0 < P_{ij} < 1$	1.153 %	0.41062 %	1.4188 %	1.4311 %

表 4-1 近似總資產與未近似總資產之誤差

從(表 4-1)我們發現各型態下，無論有無條件限制的誤差都很小，全都不超過百分之二，所以當我們將原來應為(式 4-2)的實際資產，刻意以(式 4-3)趨近的資產值取代，兩者並無太大差異，幾乎可視為兩者完全相同，故選擇較便利於我們求解的(式 4-3)為資產模型。

(二)追蹤誤差(tracking-error) 的比較

型態	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
無限制	0.003304	0.0026957	0.0065135	0.0061796
$0 < P_{ij} < 1$	0.0033041	0.0039074	0.0066108	0.0061874

表 4-2 單期模型下各型態之追蹤誤差

追蹤誤差在此我們定義為 $\frac{1}{4000}\sum_{t=1}^{4000}(\ln A^{(t)}(n) - \ln L^{(t)}(n))^2$ ，所代表的意義是這4000 筆資料 $\ln A(n)$ 與 $\ln L(n)$ 差距平方的總平均，若以型態一無限制下的追蹤誤差為例，0.003304 代表的意義為 $\ln(\frac{A(n)}{L(n)})$ 的值平均為 $\pm\sqrt{0.003304} = \pm 0.0575$ ，亦即 $\frac{A(n)}{L(n)} = 1.0592$ or 0.9441。而追蹤誤差越大也代表 A(n)與 L(n)的差距越大。

我們可以發現，加了限制之後追蹤誤差都會增加，但是增加的幅度除了型態二之外，其他增加的並不大，都不超過 5%，而型態二之所以有這麼大的變化，是因為在無限制下，有較明顯的買空賣空行為。

(三)執行時間的比較(秒)

型態	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
無限制	0.7210	0.7410	0.7410	0.7410
$0 < P_{ij} < 1$	0.8010	0.9310	0.8410	0.9220

表 4-3 單期模型下各型態之執行時間

在(表 4-3)中顯示在單期挹注資金的問題中，每次執行的時間都不超過 1 秒，而我們也嘗試直接採用 $A(n) = A(0)\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{4}\left(k_{ij}\right)^{P_{ij}}$ 為模型，選擇的目標函數為：

$$\min \sum_{k=1}^{m} \{[A^{(k)}(n)] - [L^{(k)}(n)]\}^2$$

即不以一般化最小平方法解決，我們從 Matlab 軟體的 Optimization toolbox 中選擇其他求最佳解的指令，但是每次花費的時間動輒花費 2~3 個小時，甚至在有限制條件下需要執行半天或一天的時間，而且所求出的解有時候會非常怪異，我們以 type 4 無限制情況為例，最佳資產配置圖結果如(圖 4-6)，發現結果與預期有很大出入，可能的原因在於這樣的模型其解空間是非常複雜的，我們認為所求出的解只是剛好落在極小值(local minimum)的地方，而非最小值(global minimum)的地方，我們從追蹤誤差來比較兩模型的差異，發現以 $A(n) = A(0)\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{4}\left(k_{ij}\right)^{P_{ij}}$ 為資產模型其追蹤誤差 $\frac{1}{4000}\sum_{t=1}^{4000}(\ln A^{(t)}(n) - \ln L^{(t)}(n))^2 =$ 0.0182，而以 $\ln A(n) = \ln A(0) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{4} P_{ij} \ln k_{ij}$ 當作資產模型所求出的解空間其追蹤誤差只有 0.0061796，所以可以明顯看出解並非落在最小值的地方。這也顯示當我們將模型改為 $\ln A(n) = \ln A(0) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{4} P_{ij} \ln k_{ij}$ 能精確且快速的找出最適投資組合。

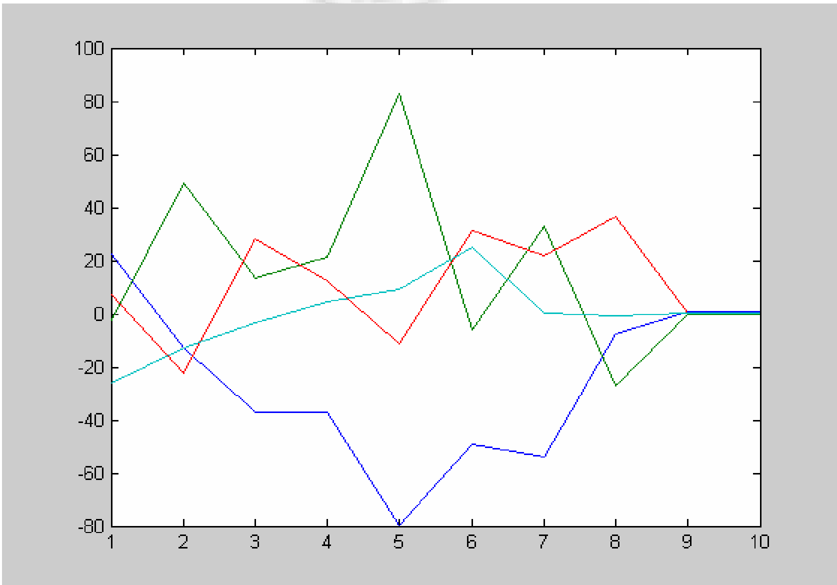

圖 4-6　以 $A(n) = A(0)\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{4}\left(k_{ij}\right)^{P_{ij}}$ 為模型其最佳化的結果