第五章　多期挹注資金模型

先前模型是解決期初挹注資金與每年作資產再調整的問題，也就是必須在期初一次就把金額投入，之後每年再對各個資產重新調整使得達到期末負債的要求。然而在有些投資計畫中，單期挹注資金可能較難執行，例如：退休金與共同基金等投資計畫，投資金額多次投入。因此，我們希望建構多期挹注資金的模型，除了能多期作資產再調整之外，還將必須在期初一次投入資金，變成能夠多期投入資金，使基金的資產負債管理能更一般化。

第一節 多期挹注資金模型建構

之前討論單期挹注資金時，目標函數能簡化為最小化一個多變量的二次函數，形成一個求最小平方的問題，也因此在求解速度以及精確度都有很大的提升，所以在多期挹注資金中，也希望將模型維持成一個多變量的二次函數，以確保我們求解速度與精確度上的便利性。所以我們考慮的方法，是把原先的負債，按照比例分攤到每年度，再根據模型建構下的求解方式，可求出每一年必須投入的金額以及資產再調整的比例。而所謂負債按照比例分攤舉例來說，我們考慮十年期的計畫，假設第一年分攤到的負債為第二年分攤的α倍，第二年分攤到的是第三年的α倍，以次類推（其中$\alpha > 0$）。因此，第一年分得的負債我們記為$L_1(n)$，則：

$$L_1(n)=\frac{(\alpha)^{10}}{\sum_{k=1}^{10}(\alpha)^k}L(n)\text{，}L_2(n)=\frac{(\alpha)^{9}}{\sum_{k=1}^{10}(\alpha)^k}L(n)\cdots\cdots\cdots\text{，}L_9(n)=\frac{(\alpha)^{2}}{\sum_{k=1}^{10}(\alpha)^k}L(n)\text{，}L_{10}(n)=\frac{(\alpha)}{\sum_{k=1}^{10}(\alpha)^k}L(n)$$

我們利用這樣的關係，可以將此一問題視為十個獨立的單期挹注資金的問題，如此一來，勢必可以求出第 0 年應該投入多少資金以及之後十年每年資產調

整的比例；第 1 年應該投入多少資金以及之後九年每年資產再調整的比例；……，依此類推。相關的時間點，包括投入金額與資產持有比例的時點我們將其利用圖示表示。

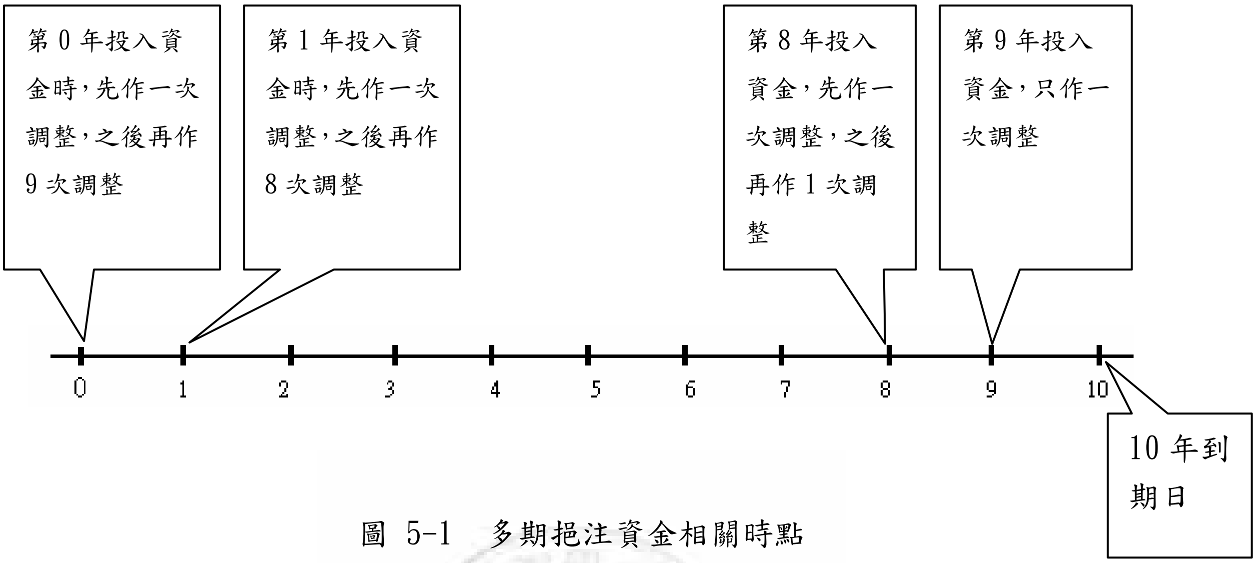

圖 5-1　多期挹注資金相關時點

然而，我們也面臨了一些問題。首先是不同時點投入的資金在同一年度中資產再調整的比例卻不相同，換句話說，因為如果按照之前單期投入資金的解決方式，當某一年要作資產再調整時，該年投入的錢與上個年度投入的錢必須以不同的比例調整，這樣勢必會增加基金管理者的困擾，也增加很多管理上的成本；另一個問題，當我們考慮多期挹注資金時，每一期負債分攤的方法可能會造成每一年投入資金的會有所不同，對於投資者來說也會造成不便。以退休金資產配置為例，在確定提撥退休金計畫中，我們希望每期能提撥固定薪資比例至個人帳戶，如果每一期提撥的金額都是不確定的，增加投資者的不安，減少其投資意願。因此，接下來我們便以解決每期投入相同資金的資產配置為基礎，之後再延伸成每年投入的資金以一定比例成長，或以隨機模擬的比例成長；因此我們必須思考其他方式，在合理情況下，希望能改善兩大問題。

我們知道如果考慮上述分割負債的方式，以單期模型的求解方式遇到最大

的問題在於「同一時點，不同時間投入的資金卻作不同資產再調整」的問題。也就是第一年投入的資金 $A_1(0)$ 到了第二年時與第二年投入的 $A_2(0)$ 必須作不同的比例調整，我們希望解決此一問題。所以當第一年期初投入的資金 $A_1(0)$，假設作第二次資產調整的比例為 $p_{21}^{(1)}, p_{22}^{(1)}, p_{23}^{(1)}, p_{24}^{(1)}$（在時點 2）；當第二年期初投入的資金 $A_2(0)$，作第一次資產調整的比例為 $p_{11}^{(2)}, p_{12}^{(2)}, p_{13}^{(2)}, p_{14}^{(2)}$（也在時點 2），我們希望這兩種比例是相同的，故我們令為 $p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}$。同樣的我們希望在時點 3 所作的調整比例也都一樣，故我們令其為 $p_{31}, p_{32}, p_{33}, p_{34}$，依此類推。這樣就能解決我們面臨的第一個問題。

其次，我們所面臨的第二個問題，則是投入資金的不確定，所以我們將單期挹注資金的模型稍作修改，但使之保持為解 GLS 的問題，接著可分別探討每期投入的相同資金，及投入資金以比例成長。

第二節 多期模型每期挹注相同資金

多期挹注資金的模型，其應用層面很廣泛，首先我們考慮每期投入相同的資金，這便可以應用於一些定時定額方式投入金額的基金。模型的建構如下：我們考慮期間為 10 年，同樣採用 4000 筆模擬資料，而每年年初投入相同資金 $A(0)$，共投入十期，我們想要找出最適合的 $A(0)$ 與 P_{ij} 以及 α，滿足目標函數：

$$\min_{p_{ij},\mathrm{A}(0)} \left\{ \sum_{k=1}^{4000} (\ln A_1^{(k)}(10) - \ln L_1^{(k)}(10))^2 + \sum_{k=1}^{4000} (\ln A_2^{(k)}(10) - \ln L_2^{(k)}(10))^2 + \cdots + \sum_{k=1}^{4000} (\ln A_{10}^{(k)}(10) - \ln L_{10}^{(k)}(10))^2 \right\}$$

$$\text{subject to } \sum_{j=1}^{4} P_{ij} = 1 \text{ 且 } 0 \le P_{ij} \le 1 \quad \forall i = 1.2....10, \forall j = 1...4 \qquad \text{(d)}$$

其中
$$\left.\begin{array}{l}
\ln A_1^{(k)}(10)=\ln A(0)+\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{4}P_{ij}\ln k_{ij}{}^{(k)}\\
\ln A_2^{(k)}(10)=\ln A(0)+\sum_{i=2}^{10}\sum_{j=1}^{4}P_{ij}\ln k_{ij}{}^{(k)}\\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\ln A_{10}^{(k)}(10)=\ln A(0)+\sum_{i=10}^{10}\sum_{j=1}^{4}P_{ij}\ln k_{ij}{}^{(k)}
\end{array}\right\} \quad \text{（式 5-1）}$$

$$\left.\begin{array}{l}
L_1^{(k)}(10)=\dfrac{\alpha^9}{1+\alpha+\ldots\alpha^9}L^{(k)}(10)\\
L_2^{(k)}(10)=\dfrac{\alpha^8}{1+\alpha+\ldots\alpha^9}L^{(k)}(10)\\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots\\
L_{10}^{(k)}(10)=\dfrac{1}{1+\alpha+\ldots\alpha^9}L^{(k)}(10)
\end{array}\right\} \quad \text{（式 5-2）}$$

而$\ln k_{ij}{}^{(k)}$與$L^{(k)}(10)$是我們模擬出的值，視為已知的常數

一、參數設定與資料來源

我們之所以會選擇這樣的方式，是希望將目標函數維持成極小化一個多變量的二次函數(quadratic equation)，而將目標函數視為最小平法的問題。然而，在目標函數(d)中，決策變數除了$\ln A(0)$與P_{ij}之外，又增加了α，我們不難發現若將α視為決策變數時，目標函數並不是一個極小化多變量二次函數的問題。當我們將(式5-2)中各等式的等號兩邊同取自然對數時，$\ln L_i^{(k)}(10)=(10-i)\ln(\alpha)-\ln(1+\alpha+\ldots\alpha^9)+\ln L^{(k)}(10)$，並非$\alpha$的線性組合，造成目標函數(d)並不能化為以$x=(\alpha,\ln A(0),p_{ij})^T$為決策變數的最小平方問題，因此我們考慮先將$\alpha$從決策變數中剔除，將$\alpha$以一常數取代，如此一來可將(式5-2)中的$L_i^{(k)}(10)$，$\forall i=1.2....10$完全視為常數，同時也將目標函數又化為極小化多元二次

函數的問題，而決策變數也變為$x=(\ln A(0),p_{ij})^T$。

資料的部分我們同樣採用 Wilkie model模擬出4000筆連續10年四種投資標的的年報酬率以及負債成長率，利用模擬出的資料，我們可以得到$\ln k_{ij}^{(k)}$以及四種不同型態的負債年報酬率。

接著可將目標函數(d)化為目標函數(b)的形式，其中C與d將會有所改變，而限制條件的矩陣Aeq、Beq與lb、ub則和先前單期挹注資金相同，C與d之結果如下:

$$C=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{10} \end{bmatrix}_{40000\times 41} \quad \text{其中} \quad C_1=\begin{bmatrix} 1 & \ln k_{11}^{(1)} & \cdots & \ln k_{21}^{(1)} & \cdots & \ln k_{10,4}^{(1)} \\ 1 & \ln k_{11}^{(2)} & \cdots & \ln k_{21}^{(2)} & \cdots & \ln k_{10,4}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ln k_{11}^{(4000)} & \cdots & \ln k_{21}^{(4000)} & \cdots & \ln k_{10,4}^{(4000)} \end{bmatrix}_{4000\times 41}$$

$$C_2=\begin{bmatrix} 1 & 0_4 & \ln k_{21}^{(1)} & \cdots\cdots & \ln k_{10,4}^{(1)} \\ 1 & 0_4 & \ln k_{21}^{(2)} & \cdots\cdots & \ln k_{10,4}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0_4 & \ln k_{21}^{(4000)} & \cdots\cdots & \ln k_{10,4}^{(4000)} \end{bmatrix}_{4000\times 41}$$

$$C_3=\begin{bmatrix} 1 & 0_4 & 0_4 & \ln k_{31}^{(1)} & \cdots & \ln k_{10,4}^{(1)} \\ 1 & 0_4 & 0_4 & \ln k_{31}^{(2)} & \cdots & \ln k_{10,4}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0_4 & 0_4 & \ln k_{31}^{(4000)} & \cdots & \ln k_{10,4}^{(4000)} \end{bmatrix}_{4000\times 41}$$

$$\vdots$$

$$C_{10}=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0_4 & \ln k_{10,1}^{(1)} & \cdots & \ln k_{10,4}^{(1)} \\ 1 & \cdots & 0_4 & \ln k_{10,1}^{(2)} & \cdots & \ln k_{10,4}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0_4 & \ln k_{10,1}^{(4000)} & \cdots & \ln k_{10,4}^{(4000)} \end{bmatrix}_{4000\times 41}$$

$$d=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{10} \end{bmatrix}_{40000\times 1} \quad \text{其中} \quad d_1=\begin{bmatrix} \ln L_1(10)^{(1)} \\ \ln L_1(10)^{(2)} \\ \vdots \\ \ln L_1(10)^{(4000)} \end{bmatrix}_{4000\times 1} = \begin{bmatrix} \ln L(10)^{(1)}+9\ln\alpha-\ln(1+\alpha+\cdots\alpha^9) \\ \ln L(10)^{(2)}+9\ln\alpha-\ln(1+\alpha+\cdots\alpha^9) \\ \vdots \\ \ln L(10)^{(4000)}+9\ln\alpha-\ln(1+\alpha+\cdots\alpha^9) \end{bmatrix}$$

$$d_2=\begin{bmatrix} \ln L_2(10)^{(1)} \\ \ln L_2(10)^{(2)} \\ \vdots \\ \ln L_2(10)^{(4000)} \end{bmatrix}_{4000\times 1} = \begin{bmatrix} \ln L(10)^{(1)}+8\ln\alpha-\ln(1+\alpha+\cdots\alpha^9) \\ \ln L(10)^{(2)}+8\ln\alpha-\ln(1+\alpha+\cdots\alpha^9) \\ \vdots \\ \ln L(10)^{(4000)}+8\ln\alpha-\ln(1+\alpha+\cdots\alpha^9) \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$d_{10}=\begin{bmatrix} \ln L_1(10)^{(1)} \\ \ln L_1(10)^{(2)} \\ \vdots \\ \ln L_1(10)^{(4000)} \end{bmatrix}_{4000\times 1} = \begin{bmatrix} \ln L(10)^{(1)} & -\ln(1+\alpha+\cdots\alpha^9) \\ \ln L(10)^{(2)} & -\ln(1+\alpha+\cdots\alpha^9) \\ & \vdots \\ \ln L(10)^{(4000)} & -\ln(1+\alpha+\cdots\alpha^9) \end{bmatrix}$$

其中 $0_4=(0,0,0,0)$。

雖然我們的考慮將 α 以常數取代，而不放入決策變數內，然而 α 的選擇似乎又是一個問題。在模型的建構下，由於我們每選定一個 α 值，就能求出滿足目標函數(d)的解，此解雖能使各年累積總資產與其相配之負債兩者差距極小化，但我們最終是期望到期日時，累積資產總值與負債總值的差距越小越好，亦即最小化追蹤誤差 $\frac{1}{4000}\sum_{t=1}^{4000}(\ln A^{(t)}(n)-\ln L^{(t)}(n))^2$，因此我們期望找出一 α 值使其不僅能滿足不標函數(d)，亦能達到最小化追蹤誤差。我們會採用以下作法：由於我們希望所求出能最小化追蹤誤差的 α 值，所以在 Matlab 中寫的副程式，其輸入值為 α，而程式中是利用之前介紹的 lsqlin 的方法，求出最佳解，接著計算出此最佳解產生的追蹤誤差，並將此追蹤誤差輸出，故此副程式可視為 α 的的函數 $f(\alpha)$。而主程式的部分我們用 Matlab 中 fmin 指令，fmin 指令主要是解決單一變數最小化的問題，例如：求 $\min_x f(x)=x^3-2x+5$，$x\in(0,2)$ 的問題。所以我們將副程式視為 $f(\alpha)$，再利用 fmin 就可以求出使 $f(\alpha)$ 達到最小的 α 值，而在

這樣的α值之下，可以使求出的最佳解達到最小化追蹤誤差的效果。所以採用這樣的方式不僅能解決α選擇的問題，也能使到期日時資產總值與負債總值的差距達最小。

二、數值結果

我們利用上述的方式，可以分別求出四種型態下考慮限制條件與無限制條件下，使追蹤誤差達最小的α值，並用此α值代回求出每年投入的金額、各資產持有的比例，以及每次執行所花費的時間。

圖 5-2 為 Type 4 無限制條件下α值與追蹤誤差的關係圖(橫軸為α值)，可以看出α值大約在 1.1119 時可使追蹤誤差可達最小。我們也利用主程式中的 fmin 可以得到α的精確值為 1.11193585914。

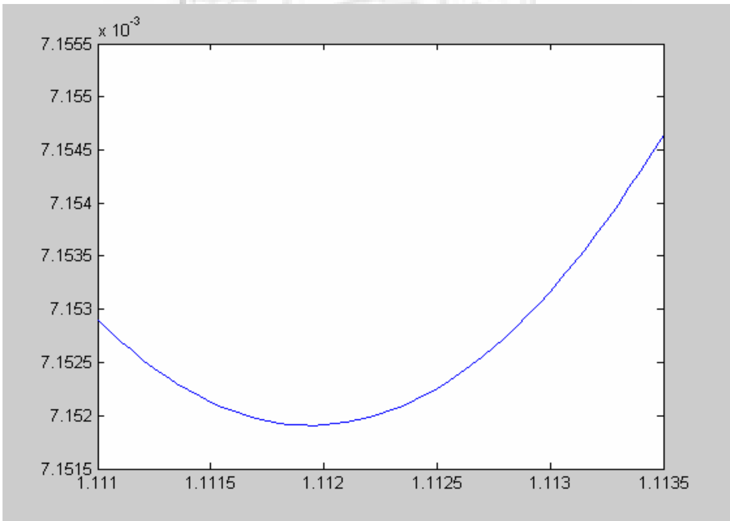

圖 5-2 Type 4 無限制條件下α值與追蹤誤差的關係圖

(1)各型態下使追蹤誤差達最小的α值

型態	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
無限制	1.0848	1.1367	1.1094	1.1119
$0<P_{ij}<1$	1.0848	1.0979	1.104	1.1028

表 5-1　多期挹注相同資金模型各型態之 α 值

(表 5-1)列舉各型態下之 α 值，而 α 值的原始意義為該年度投入金額累積值與下個年度投入金額累積值的倍數比，因此會與每年投資組合下之報酬率有很大的正相關性，所以我們也可發現無條件限制下之 α 值都較大於有限制條件，這也是相當合理的。

(2)最適投資比例與期初投入資金

在求出各型態的 α 值後，分別求出此 α 值之下的最適投資比例。由於各個資產的比例趨勢與單期投注資金的情況類似，在期初時都會持有較高的比例在與負債現金流量最為類似的資產，之後會隨時間逐年遞減，當到達期末時會提高容易變現的短債(short-term bonds)比例，降低流動風險，而在考慮限制條件後，也提供當資產無法買賣空之最適投資比例。因此就不多加詳述，各型態下的圖形，結果可參考附錄三。而型態三與型態四之投資組合相當類似，差異在於型態四每年投入的資金較型態三來的多，結果也與單期挹注資金結果相似。

型態	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
無限制	0.10746	0.091785	0.08172	0.12113
$0 < P_{ij} < 1$	0.10746	0.096752	0.082362	0.12281

表 5-2　多期挹注相同資金模型各型態之 A(0)

(3)追蹤誤差 tracking-error（$\frac{1}{4000}\sum_{t=1}^{4000}(\ln A^{(t)}(n)-\ln L^{(t)}(n))^2$）的比較

型態	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
無限制	0.0030996	0.013002	0.0078851	0.0071519
$0 < P_{ij} < 1$	0.0030993	0.017362	0.0081222	0.0075081

表 5-3 多期挹注相同資金模型各型態之追蹤誤差

在追蹤誤差方面，由於投注資金分為多次投入，變數數量增加，因此相較於

單期挹注資金，追蹤誤差會略為增加。

(4)時間的比較(計算單位為秒)

時間的計算是開始求出使追蹤誤差達到最小的 α 值為起始點，將所得到的 α 值代回求出決策變數 $x=(\ln A(0), p_{ij})'$ 為止，其結果如下：

型態	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
無限制	14.2010	14.2000	13.9600	12.7480
$0<P_{ij}<1$	61.9500	133.1620	83.4100	86.5050

表 5-4 多期挹注相同資金模型各型態之執行時間（秒）

我們可以發現在有限條件之下的時間比無限制時所需的時間多，此結果與單期挹注資金相同，雖然增加的幅度四種型態都有所不同，且增加幅度也較單期挹住資金來的多，但是整體而言求解的速度相當快，最慢的也能在兩分半鐘內，我們也可比照單期作法，同樣的比較當目標函數不為最小平方問題時，花費的時間依舊是相當長，甚至無法求出最佳解，這也顯示出將問題化為二次函數是能大大的提高求解的速度。

第三節　多期模型每期挹注資金以比例成長

前面介紹了多期挹注相同資金的模型，可應用於定期定額型基金，而對於像退休金這種，投入的金額為薪資的某個比例，則較不適用，原因在於薪資可能會隨時間調整，而投入的金額則也會隨時間有所不同。因此，我們接下來將探討投入的金額以比例成長的模型。

如果每年投入資金不相同，以比例成長，例如：$A_n(0)=(1+\gamma_n)A_{n-1}(0)$，其中 $\gamma_n>0$ 為挹注資金的成長比例，亦即若第一年投入的金額為 $A(0)$，則第二年之後每年投入資金分別為 $(1+\gamma_2)A(0)$, $(1+\gamma_2)(1+\gamma_3)A(0)$,……，其中 γ_2 表第二年投入金額相較於第一年的成長率；γ_3 表第三年投入金額相較於第二年的成長率；…….。而這種方式的資產負債管理其應用的層面會廣泛，對於某些條件下資金投入會較方便。例如我們希望每年投入的金額是以固定比例成長則可令 $\gamma_n=\gamma$ 為一固定常數即可。而對於退休基金管理而言，我們希望投入的金額是薪資的固定比例，而薪水成長率是不確定性的，所以可藉由隨機模擬資料，模擬出薪資成長率，這些資料就代表挹注資金的成長比例 γ_n，我們希望找出最適的 $A(0)$ 與 P_{ij} 以及 α，同樣滿足目標函數(d)，其中與前一節不同的地方在(式 5-1)與(式 5-2)我們必須改為下面(式 5-3)與(式 5-4)。

$$\min_{p_{ij},\mathrm{A}(0)}\left\{\sum_{k=1}^{4000}(\ln A_1^{(k)}(10)-\ln L_1^{(k)}(10))^2+\sum_{k=1}^{4000}(\ln A_2^{(k)}(10)-\ln L_2^{(k)}(10))^2+\cdots+\sum_{k=1}^{4000}(\ln A_{10}^{(k)}(10)-\ln L_{10}^{(k)}(10))^2\right\}$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{j=1}^{4}P_{ij}=1 \text{ 且 } 0\le P_{ij}\le 1\quad \forall i=1.2....10,\forall j=1...4 \tag{d}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\ln A_1^{(k)}(10) &= \ln A(0) &&+\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{4}P_{ij}\ln k_{ij}{}^{(k)}\\
\ln A_2^{(k)}(10) &= \ln A(0)+\ln(1+\gamma_2^{(k)}) &&+\sum_{i=2}^{10}\sum_{j=1}^{4}P_{ij}\ln k_{ij}{}^{(k)}\\
\ln A_3^{(k)}(10) &= \ln A(0)+\ln(1+\gamma_2^{(k)})+\ln(1+\gamma_3^{(k)}) &&+\sum_{i=3}^{10}\sum_{j=1}^{4}P_{ij}\ln k_{ij}{}^{(k)}\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\ln A_{10}^{(k)}(10) &= \ln A(0)+\sum_{n=2}^{10}\ln(1+\gamma_n^{(k)}) &&+\sum_{i=10}^{10}\sum_{j=1}^{4}P_{ij}\ln k_{ij}{}^{(k)}
\end{aligned}\right\}\quad \text{(式 5-3)}$$

$$\left.\begin{aligned} L_1^{(k)}(10) &= \frac{\alpha^9}{1+\alpha+\ldots\alpha^9} L^{(k)}(10) \\ L_2^{(k)}(10) &= \frac{\alpha^8}{1+\alpha+\ldots\alpha^9} L^{(k)}(10) \\ \vdots \qquad & \qquad\qquad \vdots \\ L_{10}^{(k)}(10) &= \frac{1}{1+\alpha+\ldots\alpha^9} L^{(k)}(10) \end{aligned}\right\} \quad \text{（式 5-4）}$$

而 $\ln k_{ij}^{(k)}$ 與 $L^{(k)}(10)$ 是模擬的值，$\gamma_n^{(k)}$ 也可視為已知的常數，故(式 5-3)中每一個等式都可以化為決策變數 $x=(\ln A(0), p_{ij})^T$ 的線性組合，而(式 5-4)在 α 已知條件下 $L_n^{(k)}(10)$ ，$\forall n=1.2....10$ 也可視為常數。

一、參數設定與資料來源

從(式5-3)與(式5-4)可找出滿足目標(b)中的各項參數，不難發現(式5-3)相較於(式5-1)多了一些常數項，因此(b)中的各項參數僅改變了d，如下所示，其餘之矩陣C、 Aeq 、 Beq 與 lb 、ub 與之前所示相同。

$$d_1 = \begin{bmatrix} \ln L_1(10)^{(1)} \\ \ln L_1(10)^{(2)} \\ \vdots \\ \ln L_1(10)^{(4000)} \end{bmatrix}_{4000\times1}$$

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{10} \end{bmatrix}_{40000\times1}$$ 其中 $$d_k = \begin{bmatrix} \ln L_k(10)^{(1)} - \sum_{n=2}^{k} \ln(1+\gamma_n^{(1)}) \\ \ln L_k(10)^{(2)} - \sum_{n=2}^{k} \ln(1+\gamma_n^{(2)}) \\ \vdots \\ \ln L_k(10)^{(4000)} - \sum_{n=2}^{k} \ln(1+\gamma_n^{(4000)}) \end{bmatrix}_{4000\times1}, \quad \forall k=2....10$$

接著與之前作法相同,利用副程式求出能最小化追蹤誤差的α值,以及此α值之下的最佳解$\ln A(0)$與p_{ij}，而此$A(0)$代表的是第 0 年必須投入的金額，之後每期投入金額我們則是可考慮(i)以固定比例 1.02 成長(ii)以隨機性的成長率成長。

二、數值結果

每年投入金額以固定比例 1.02 成長,則假設所有$\gamma_n^{(t)} = 0.02$即可,若考慮投入金額以隨機性的成長,則是可利用 Wilkie 投資模型,模擬出所有$\gamma_n^{(t)}$。我們可分別求出四種型態下考慮限制與無限制條件下，使追蹤誤差達最小的α值，並用此α值代回求出第 0 年應投入的金額$A(0)$、與各資產持有的比例，以及每次執行所花費的時間。

(1)各型態下使追蹤誤差達最小的α值

(i)投入金額每期以固定比例 1.02 成長

型態	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
無限制	1.0647	1.1214	1.0919	1.0947
$0 < P_{ij} < 1$	1.0647	1.0764	1.0839	1.0835

表 5-5 挹注資金以固定比例 1.02 成長之α值

(ii) 投入金額每期以隨機的成長率成長

型態	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
無限制	1.0001	1.0467	1.0114	1.0111

$0 < P_{ij} < 1$	1.0114	1.0339	1.0152	1.0146

表 5-6 挹注資金以隨機的成長率成長之α值

之前有提到α值與每年之平均報酬率有很大相關性，我們從(表 5-5)與(表 5-6)可以看出α值若以隨機性成長的都低於以 1.02 比例成長的，換而言之，隨機性成長率之年平均報酬較低於固定比例成長，這最主要的原因在於以 Wilkie 模型模擬出隨機成長的報酬率平均為 1.06 高於固定比例 1.02，因此兩者相較之下，隨機成長每年之平均報酬率則不須太高就可以達到預期負債水準，我們也可再比較若投入金額完全不成長的(表 5-1)，可發現不成長的平均報酬率必須最高方可達到到期日時負債水準。

(2)最適投資比例

在求出各型態的α值後，分別求出此α值之下的最適投資比例。其結果與先前介紹的非常相似，結果可參考附錄四。此外還有值得我們討論的地方，當我們比較投入金額以固定比例成長與以隨機比例成長兩者的差異，我們發現隨機比例成長期初買賣空的行為相對的減少許多，這也表示期初不會為了選擇較高報酬率的投資，而放空報酬較低的投資部位，也顯示出隨機成長下的平均報酬應低於固定以 1.02 比例成長的報酬，接著我們可將結果分析作驗證，以型態四負債為例，利用各年各項資產持有比例，代回求出十年間之平均報酬，若投資金額以 1.02 之比例成長其平均報酬率約為 1.093，而以隨機成長之平均報酬約為 1.079，而其他型態也都存在這樣的關係。

(3) 首年期初投入資金

(i) 投入金額每期以固定比例 1.02 成長

型態	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4

無限制	0.099298	0.084645	0.07544	0.1118
$0 < P_{ij} < 1$	0.099297	0.089704	0.076277	0.11359

表 5-7 固定比例 1.02 成長各型態下 A(0)

(ii) 投入金額每期以隨機的成長率成長

型態	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
無限制	0.085775	0.075641	0.066924	0.099609
$0 < P_{ij} < 1$	0.084263	0.07623	0.066616	0.099184

表 5-8 以隨機的成長率成長各型態下 A(0)

期初資金方面，前面文章也提過，由於我們模擬出隨機成長率平均約為 1.06 高於固定比例的 1.02，所以經過比較後也能清楚看出固定比例成長所投入的資金會高於隨機比例成長，而由於兩者投入的資金是逐年成長，因此相較於每期投入相同資金(表 5-2)，投入金額也相對減少。另一個值得探討的議題是，當我們考慮的是退休金計畫時，負債型態為投入資金乘上一常數時，此時所求出之 A(0) 所代表的意義為提撥率。舉例來說，當員工期望在退休時可享有 80%的所得替代率，其負債可表示如下：

$$80\% \times S_n \times \ddot{a}_{65}$$

若假設第一年薪資為 A(0)，則 S_n 為退休時的薪資，等同於 A(0)乘上一常數，故將 A(0)消去後，此時所求得期初投入資金即為提撥率。

(4)追蹤誤差 tracking-error（$\frac{1}{4000}\sum_{t=1}^{4000}(\ln A^{(t)}(n)-\ln L^{(t)}(n))^2$）的比較

(i) 投入金額每期以固定比例 1.02 成長

型態	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4

無限制	0.0030278	0.013496	0.0079241	0.0071521
$0 < P_{ij} < 1$	0.0030281	0.018276	0.0082092	0.0075751

表 5-9　以固定比例 1.02 成長各型態之追蹤誤差

(ii) 投入金額每期以隨機的成長率成長

型態	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
無限制	0.018578	0.0047619	0.0096857	0.0096553
$0 < P_{ij} < 1$	0.0192	0.0063339	0.0097979	0.0097707

表 5-10　以隨機的成長率成長各型態之追蹤誤差

從(表 5-9)與(表 5-10)中，我們可比較在有無條件限制下追蹤誤差增加的幅度，可看出除了型態一兩者買賣空行為都不明顯之外，其他三種型態追蹤誤差增加率，固定比例成長會比隨機比例來的大，這也說明了隨機比例成長買空賣空的情況會少於固定比例成長。

(5)時間的比較(計算單位為秒)

時間的計算是開始求出使追蹤誤差達到最小的 α 值為起始點，將所得到的 α 值代回求出決策變數 $x = (\ln A(0), p_{ij})'$ 為止，其結果如下：

(i) 投入金額每期以固定比例 1.02 成長

型態	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
無限制	13.9700	14.2000	13.9100	14.281
$0 < P_{ij} < 1$	89.5480	123.718	75.6590	75.128

表 5-11　以固定比例 1.02 成長之執行時間

(ii) 投入金額每期以隨機的成長率成長

型態	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
無限制	15.9020	14.6710	15.6020	13.499
$0 < P_{ij} < 1$	39.3960	119.442	58.1740	54.939

表 5-12　以隨機的成長率成長之執行時間

結果與前面所論述都相同，而整體而言求解也很迅速，也都能在短時

間內求出，這也表示出將問題化為二次函數是能大大的提高求解的效率。