第四章 理論模型與假說發展

本章之主要目的在於以數學模型為基礎，配合理論文獻與實地情境，為本研究之實證假說提供較堅強的理論基礎。基於本研究之主要重心在於實證分析，因此，關於本章之理論模型的建構，係以前人所提出之模型為基礎進行修改，據以配適本研究之分析情境，而未有明顯創新之處。

首先，本研究依據等候理論模型及相關文獻，包括：Banker et al. (1988)、Benjaafar (1994,1995)以及 Benjaafar and Gupta (1998)，配合個案公司之情境，探討產品多樣性與路徑彈性對生產績效之影響;之後,則以 Jordan and Graves (1995)所提出之整數規劃模型為基礎，探討機器彈性對生產績效之可能影響，並建立本研究之實證假說。

第一節係以單一機台型態與單一生產路徑的情境，分析產品多樣性對生產績效之影響。第二節擴充為多項生產路徑的情境，分析路徑彈性對生產績效的影響，第三節則擴充為多種機台型態，探討機器彈性對生產績效之影響。

第一節 產品多樣性對生產績效之影響

積體電路的生產屬於多階段的生產過程，以典型的 CMOS 為例，整個完整的生產流程包含了 200 多道生產步驟，歷時長達 4~6 週，這數以百計的生產步驟包含了氧化、光阻塗佈、顯影、蝕刻、離子植入、化學氣相沉積與擴散等等。

為執行不同功能，晶圓廠一般區分成數個生產區域，例如：黃光微影、蝕刻、擴散、化學氣相沉積、離子植入、金屬濺鍍與化學研磨等區，在生產過程中，晶圓會以批量方式在各區域來迴穿梭，至各工作站接受處置，即所謂的迴流式生產。由於個案公司屬專業晶圓代工，採客製化生產，產品種類達數百種，因此，個別工作站常會面臨處理多種產品型態的問題，在生產現場，產品組合的複雜性更被認為是影響生產績效的關鍵因素。以下本研究以蝕刻區為例，說明產品多樣性對生產績效的影響。

假設在晶圓廠的蝕刻區有一部機台可處理k種製程，每個月該機台的可用產能為C小時，依據生產排程，未來這一個月該機台預計需處理m個生產批量(lot)，假設屬於i 種製程的生產批量其到達率n_i 為一隨機變數，亦即，$\sum n_i = m$, i=1,2…k，且到達過程遵循一致獨立的卜瓦松分配(identically independent Poisson)，此項假設被認為可得到穩健的分析結論，因此廣泛用於作業研究中(例如：Karmarkar 1987, Banker et al. 1988)。

屬於i種製程之生產批量其在機台上的處理時間與啟動時間均為隨機變數，分別以p_i, s_i表示，因此，一個屬於i種製程的生產批量，其在機台上的總處理時間為$T_i = p_i + s_i$, i= 1,2,…k。在晶圓廠，各生產批量在機台上的處理均以製程配方表示，由於產品種類眾多，因此即使屬於相同製程，也可能有不同的製程配方，完全依顧客需求的產品功能決定，由於當機台前後處理的兩個生產批量，若製程配方差異極大，需要額外的測試與機台校正動作，花費較長時間，但若製程配方差異較小，則機台只需花費極小時間微幅調整溫度或溼度，為符合現場實際情況，我們將啟動時間區分為主啟動(major setup)與微啟動(minor setup)兩類，依據工程師表示，通常主啟動時間會發生在不同製程間的轉換，因此，我們假設當該機台前後處理兩種不同製程種類的生產批量時會發生主啟動，但當製程種類相同時，則只會發生微啟動。基於此假設，可將屬於i種製程之生產批量的啟動時間定義如下：

$$s_i = \quad s_{mi}, \quad \text{w.p.} \quad n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$$s_{ma}, \quad \text{w.p.} \quad 1- \ n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i \quad \text{Where } s_{ma} \geq 0, \quad s_{mi} \geq 0, \quad s_{ma} > s_{mi} \qquad (1)$$

配合前述處理時間的假設，可得：

$$T_i = p_i + s_i$$

$$= p_i + s_{mi}\, (n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i) + s_{ma}\, [1- (n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i)] \qquad (2)$$

對於個別生產批量在機台上之總處理時間的機率分配我們不作任何限制性的假設，僅假設處理時間與啟動時間互相獨立，於是，我們可得到T_i的均值與變異數如下：

$$\mathrm{E}[T_i] = \mathrm{E}[p_i\,] + \mathrm{E}[s_i]$$

$$= \mathrm{E}[p_i\,] + 1/m \cdot (s_{mi} - s_{ma}) \cdot \mathrm{E}\,[n_i] + s_{ma}$$

$$\mathrm{Var}\,[T_i] = \mathrm{Var}[p_i\,] + \mathrm{Var}[s_i]$$

$$= \mathrm{Var}[p_i\,] + [1/m\,(s_{mi} - s_{ma})]^2 \cdot \mathrm{Var}\,[n_i]$$

$$E[T] \quad = \mathrm{E[P]} + \sum_{i=1}^{k} (n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i) \cdot [s_{mi}\, (n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i) + s_{ma}\, [1- (n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i)]$$

$$= \mathrm{E[P]} + s_{mi}\, [\, \Sigma\, (n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i)^2] + s_{ma}\, [1- \sum_{i=1}^{k} (n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i)^2] \qquad (3)$$

考慮一項特例：當產品多樣性達到最高時，亦即$n_i = n$，上述等式可簡化為：

$$E[T] = \mathrm{E[P]} + 1/k \cdot s_{mi} + (k\text{-}1)/k \cdot s_{ma} \tag{4}$$

因此，該機台的產出率可定義為：

$$\mathrm{R} = 1/E[T]$$

$$= 1/\{E[P] + s_{mi}(1/k) + s_{ma}[(k-1)/k]\} \tag{5}$$

為簡化分析，假設各生產批量之交期優先性相同，在各工作站係依先到先處理(first-come-first-served，簡稱 FCFS)的法則處理，則產能利用率為：

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i E[T_i]}{C} = \frac{nkE[T]}{C} \tag{6}$$

將(4)代入(6)，可得：

$$\rho = \frac{nk[E[P] + s_{mi}(1/k) + s_{ma}(k-1)/k]}{C}$$

$$= \frac{nkE[P]}{C} + \frac{nk[s_{mi}(1/k) + s_{ma}(k-1)/k]}{C}$$

$$= \rho_{operation} + \rho_{setup} \tag{7}$$

為了使整個生產系統達到穩定的狀態，需假設$\rho < 1$，亦即，該機台的可用產能大於處理所有生產批量的總時間，$\mathrm{C} > \sum_{i=1}^{k} n_i E[T_i]$，我們以 E [W]表示個別生產批量在機台前的平均等候時間，由於各生產批量到達該機台的過程遵循卜瓦松分配(Poisson distribution)，且各生產批量的處理時間為符合一致獨立的一般性分配(general distribution)，因此，我們可採用 Pollaczek-Khintchine 公式推導等候時間的期望值，據此可得：

$$E[W] = \frac{[\rho^2 (C/n) + Var[T](n/C)]}{2(1-\rho)} \tag{8}$$

將(6)式代入(8)式，可得：

$$E[W] = \frac{[(n^2 k^2 E^2[T]/C^2)(C/n) + Var[T](n/C)]}{2[1-(nkE[T]/C)]}$$

$$= \frac{nC[(k^2 E^2[T]/C^2) + (Var[T]/C^2)]}{2[1-(nkE[T]/C)]} \tag{9}$$

由(5)式，

$$\partial R \Big/ \partial k = \frac{-(s_{ma} - s_{mi})}{k^2\{E[P] + s_{mi}(1/k) + s_{ma}[(k-1)/k]\}^2} < 0 \tag{10}$$

依據上述分析可發現：當產品多樣性愈高導致機台上所處理之製程種類愈多時，非生產性產能利用率愈高，亦即耗用於啟動時間的設備產能愈高，因此造成設備生產力的降低。據此，本研究提出假說一如下：

H1: 給定其他條件不變，設備生產力會隨著產品多樣性的增加而降低。

由(9)式，

$$\partial E[W] \Big/ \partial Var[T] = \frac{n}{2(C - nkE[T])} > 0 \tag{11}$$

此外，在一動態的環境下，製程種類的複雜性往往會增加機台上各生產批量處理時間的變異，因此，本研究並進一步透過處理時間的變異性檢視產品多樣性對時間績效的影響，根據模式分析結果，本研究提出假說二如下：

H2: 給定其他條件，生產批量的生產週期時間會隨著產品多樣性的增加而增加。

在積體電路的製造環境中，除了時間績效之外，產品多樣性與製造環境的不確定性對品質同樣具有負面影響，吾人可分別由報廢率與重製率分別檢視之：

在報廢率方面，依據晶圓代工的生產特性，良率的波動可歸因於製程、設備、人員、原物料投入等與製造環境攸關的因素，當產品多樣性愈高時，由於生產改變的頻率增加，換機時間增加，製程的不穩定性因此提高，故而，增加了破片與報廢發生的可能性。

在重製率方面，由於積體電路製程對於微塵、雜質的敏感性很高，特別是一些深次微米製程，一點點微塵與水氣就可能是漏電流與氧化瑕疵的根源。而隨著等候時間的增長，晶圓暴露於空氣中的時間增加，晶圓接觸到微塵與水氣的機會也大為提高，因此，可能造成重製(rework)的發生與良率的下降。

是故，依據積體電路的生產特性，關於產品多樣性對品質績效的影響，本研究推論：

H3: 給定其他條件不變，生產品質會隨著產品多樣性的增加而降低。

第二節 路徑彈性對生產績效與生產成本之影響

如前一節所述，積體電路係採迴流式生產，由於生產不同的產品所需的作業活動相似，例如：曝光、顯影、蝕刻、擴散、離子植入，但在執行各項作業活動的時間、順序、次數、處方(recipe)及所使用的機台上則各有差異，因此，當產品多樣性愈高，不僅生產批量到達各工作站的時間愈難預測，各工作站處理時間的變異性也愈大，故而，容易造成等候時間的延長與交期績效的降低。

另一方面，由於半導體的製造環境具有以下特性，使前述產品多樣性對績效的負面影響更形擴大：即生產步驟繁多、不定期進行偵誤(trouble shooting)作業、機台維修保養與校正、隨機性的機台當機、重製(rework)的發生等，當這些因素發生時，無可避免地造成機台負荷量的異常波動與生產流程的中斷。

儘管如此，基於交期績效與生產週期時間的長短是決定顧客服務品質的關鍵因素，個案公司在現場控制、生產規劃與流程設計上乃致力於減少產品多樣性與生產環境不確定性對生產績效的負面影響，其中，路徑彈性的提昇為主要的途徑之一。以下本研究進一步分析路徑彈性對生產績效與成本的影響。

延用 Benjaafar(1994)之設計，本研究將製造系統視作是一生產線(flow line)，由多項生產階段所組成，製造系統的彈性由各階段的路徑彈性所決定，具體而言，針對特定生產階段，當每工作站僅專注於處理單一生產批量時，換言之，即每一生產批量僅有單一生產路徑時，彈性為零，隨著可選擇的生產路徑愈多，路徑彈性隨之增加。進而，將每一生產階段模式化成一等候線，透過檢視各階段生產批量之等候行為的改變，可分析路徑彈性對生產績效的影響。

假設在製造過程中的生產階段j ，每一生產批量有k個工作站可以選擇，k愈大，表示在此一生產階段，可選擇的生產路徑愈多，路徑彈性彈性愈高。假設每個工作站的可用產能為C小時，依據生產排程，產品型態i 之生產批量的平均到達率為n_i，i =1, 2,…. k，但各生產批量到達時間並不確定，假設遵循獨立一致的卜瓦松過程，均值為n_i，i =1, 2,…. k，依據過去研究，此類分配性的假設被認為可產生可靠的預測(例如：Banker et al. 1988; Benjaafar and Gupta 1998)，不過，為增加分析結果的強韌性，此項假設在之後的分析中會被放寬。合併的生產批量到達過程(combined lot arrival process)亦呈卜瓦松分配，均值為 $m=\sum_{i=1}^{k} n_i$。為簡化分析，假設各生產批量的交期優先性相同，因此，在該生產系統前等待的生產批量是依據先到先處理(FCFS, first-come-first-served)的方式指派至最先空出來的工作站上處理。

假設屬於i種製程之生產批量其在機台上的處理時間與啟動時間均為隨機變

數，分別以p_i, s_i表示，因此，一個屬於i種製程的生產批量，其在機台上的總處理時間為$T_i = p_i + s_i$, i= 1,2,…k。假設屬於產品型態i的生產批量其啟動時間如前節所定義：

$$s_i = \begin{cases} s_{mi}, & \text{w.p. } n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i \\ s_{ma}, & \text{w.p. } 1- n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i \end{cases} \quad \text{Where } s_{ma} \geq 0,\quad s_{mi} \geq 0,\quad s_{ma} > s_{mi}$$

配合前述處理時間的假設，可得：

$$T_i = p_i + s_i$$

$$= p_i + s_{mi}\,(n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i) + s_{ma}\,[1- (n_i \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_i)]$$

假設個別生產批量在機台上之總處理時間與到達時間的機率分配均呈獨立一致的指數分配，預期各生產批量需在生產系統j前等候的機率(以π_k表示)為：

$$\pi_k = \frac{k^k \rho^k}{k!(1-\rho)\{(\sum_{j=0}^{k-1} k^j \rho^j \Big/ j!) + [k^k \rho^k / k!(1-\rho)]\}}$$

$$= \{\sum_{j=0}^{k-j} [k!(1-\rho)/ j!(k\rho)^{k-j}] + 1\}^{-1} \qquad (12)$$

由上式可看出π_k為k的單調遞減函數，換言之，當彈性(k)愈高，各生產批量在生產系統前的等候機率(π_k)愈低，當k 趨近於無窮大時，等候機率趨近於零。

平均各生產批量在生產階段j的等候時間(以E[W_k]表示)則為：

$$E[W_k] = \pi_k \{1/[(k / E[T]) - n]\}$$

$$= \frac{\pi_k}{k\{[k(1/E[P]) / [(1/E[P])(s_{mi} + s_{ma}(k-1)) + k]] - n\}}$$

$$\text{Where} \quad \pi_k = \{\sum_{j=0}^{k-j} [k!(1-\rho)/ j!(k\rho)^{k-j}] + 1\}^{-1} \qquad (13)$$

每一生產批量在生產階段j的平均生產週期時間(以E [F_k]表示)為：

$$E[F_k]=\frac{\pi_k}{k\{[k(1/E[P])/[(1/E[P])(s_{mi}+s_{ma}(k-1))+k]]-n\}}+s_{mi}(1/k)+s_{ma}[(k-1)/k]+E[P]$$

$$\text{Where}\quad \pi_k = \{\sum_{j=0}^{k-j}[k!(1-\rho)/j!(k\rho)^{k-j}]+1\}^{-1} \tag{14}$$

為簡化分析，假設啟動時間為零，則上式可簡化為：

$$E[F_k]=E[W_k]+E[P]=\frac{\pi_k}{k[(1/E[P])-n]}+E[P] \tag{15}$$

當k=1 時，$\pi_1=[(1-\rho)/\rho+1]^{-1}=\rho$

$$E[F_1]=E[W_1]+E[P]=\pi_1/[(1/E[P])-n]+E[P]=\{\rho/[(1/E[P])-n]\}+E[P] \tag{16}$$

比較(15)式與(16)式，

$\because \pi_1>\pi_k$， 又 $k>0$,

$\therefore \pi_1/k>\pi_k/k$，因此可得， $E[W_1]/k>E[W_k]$，$E[F_1]>E[F_k]$

由上式可知，當 k(即路徑彈性)愈大，個別生產批量的平均等候時間愈短，生產週期時間愈短。

為增加分析結果的一般性，本研究續放寬生產批量到達機台時間與生產批量處理時間符合指數分配的假設，不做任何限制性的分配假設，而以V_a^2 表示生產批量到達時間的變異係數，以 V_S^2表示生產批量處理時間的變異係數，預期各生產批量的生產週期時間為：

$$E[F_k]=\frac{\pi_k(1+V_S^2)(V_a^2+\rho^2V_S^2)}{2k(1/E[P])(1-\rho)(1+\rho^2V_S^2)}+E[P]$$

$$\text{Where}\quad \pi_k = \{\sum_{j=0}^{k-j}[k!(1-\rho)/j!(k\rho)^{k-j}]+1\}^{-1} \tag{17}$$

將上式重新整理後可得：

$$E[F_k]=\frac{\pi_k}{k(1/E[P])}\cdot\frac{(1+V_S^2)(V_a^2+\rho^2V_S^2)}{2(1-\rho)(1+\rho^2V_S^2)}+E[P]$$

$$= V/R + P$$

$$\text{Where } V = \frac{(1+V_S^2)(V_a^2+\rho^2 V_S^2)}{2(1-\rho)(1+\rho^2 V_S^2)}$$

$$R = k(1/E[P])/\pi_k \tag{18}$$

由於 V 為生產環境之變異性(variability)的增函數，R 為路徑彈性(routing flexibility)的增函數，由上式可看出：各生產批量的生產週期時間會隨著環境變異性的增加而增加，但會隨著路徑彈性的增加而降低。據此，可提出假說四：

H4: 給定其它條件不變，生產批量的生產週期時間會隨路徑彈性的增加而降低。

除了等候時間外，既有文獻並指出路徑彈性的利益尚可能來自於品質的提昇。採用來自一家飲料公司的實地資料，Dopuch and Gupta (1994)檢視生產變動頻率對良率的影響，結果發現：生產流程變動次數的下降，可減少瑕疵品的比例，對良率有正面影響。依據半導體的生產特性，路徑彈性對品質的影響可能來自於兩方面：一方面，路徑彈性的增加賦予了線上工程師較高的派工彈性，具體而言，當每一生產批量可選擇的生產路徑增加時，工程師可選擇讓該生產批量進入之前處理類似生產批量的工作站中生產，藉以降低換機的頻率，因此，減少晶圓發生報廢的機會；另一方面，隨著等候時間愈長，晶圓受到微塵與水氣污染的機會愈大，需要進行重製(rework)的可能性愈高，因此，可預期等候時間的減少對良率有正面影響。綜而言之，關於路徑彈性對品質績效的影響，本研究推論：

H5:給定其他條件不變，生產品質會隨路徑彈性的增加而增加。

在生產成本方面，吾人可分別由路徑彈性的直接與間接影響來看，在直接影響方面，隨著路徑彈性的增加，生產改變的頻率降低，產能耗用於非生產性用途的比例隨之減少，因此，可降低個別生產批量所耗用的間接製造費用；在間接影響方面，當良率與時間績效隨著路徑彈性的增加而提昇時，可預期地，直接與間接生產資源的消耗會隨之減少，進而導致生產成本的降低。故而，關於路徑彈性對成本績效的影響，本研究推論：

H6: 給定其他條件不變，生產成本會隨路徑彈性的增加而降低。

第三節 機器彈性對生產績效與生產成本之影響

由於個案公司致力於專業晶圓代工，各期間所生產的產品組合完全取決於當期的顧客下單，具有高度的需求不確定性，為因應此不確定性對產能利用的影響，在產能的投資上，重視資源彈性的取得。具體而言，即強化各工作站的機台與人員處理多種產品型態的能力(即資源彈性)，以避免工作站的利用率因特定型態之產品需求的波動而下降。為檢視資源彈性之效果，以下本研究應用 Jordan and Graves(1995)所發展之整數規劃模型，但以個別機台為分析客體，探討機器彈性對生產績效與生產成本的影響。

假設在一晶圓廠中，有i種產品，i=1,2,….n，與j部機台，j=1,2….m，每個月均由工程部門決定產品與機台的配置，目標是極大化總產出率，產品與機台的配置以一組順序配對，M來表示，$(i, j)\in M$代表第j部機台可生產產品i，假設對任何產品i而言，在第j部機台上每一單位的產能可用以生產每一單位的產品i，而個別機台的每月產能為s_j單位。

假設產品i的需求Di為隨機變數，以$f_i(\,)$代表其機率密度函數，工程部門可透過各機台的預計產出率來評估產品與機台配置(即M)的良窳。假設決策順序為：工程部門預先觀察到產品需求的實現值，之後決定各機台生產的產品數量，決策目標為極大化機台的產出率。由於當產品需求水準固定時，極大化機台的產出率等同於極小化未能被機台處理的產品需求，因此，對工程部門而言，當觀察到產品i之需求的實現值(即d_i)之後，其主要的決策目標在於：透過以下的線性方程式，找到可極大化產出率，亦即可極小化未被滿足之產品需求的最佳目標值：

$$
\begin{aligned}
& Min \ \sum_{i=1}^{n} e_i \\
& s.t. \quad \sum_{(i,j)\in M} q_{ij} + e_i \geq d_i, \ \ \forall i = 1,2\cdots n \\
& \qquad \sum_{(i,j)\in M} q_{ij} \leq s_j \ , \qquad \forall j = 1,2,\cdots m
\end{aligned}
\tag{1}
$$

(1)式中工程部門的決策變數為q_{ij}，代表第j部機台預計要生產i產品的需求數量， e_i代表由於產能的限制導致i產品的需求未能被機台處理的部分，s_j 代表j機台的產能。第一組限制式定義產品需求，以及產品需求中未能被機台處理的部分，第二組限制式定義機台的產能限制。主要目標在極小化未能被機台處理的產品需求，亦即極大化機台的產出率。

為了求解(1)式，吾人首先找出(1)式的對偶如下：

$$Max \ \sum_{i=1}^{n} d_i v_i - \sum_{j=1}^{m} s_j r_j \qquad [D1]$$

$$\text{s.t.} \quad v_i - r_j \le 0 \qquad for\ all \quad (i,j) \in M$$

$$v_i \le 1 \qquad for \quad i = 1, 2, \ldots..n$$

$$v_i, r_j \ge 0 \qquad for\ all\ i, j$$

經由上述的對偶式，吾人可以獲得兩項觀察：首先，當$s_j \ge 0$時，吾人可以設定$r_j = Max\ [\ v_i \mid i$ such that $(i,j) \in M]$，亦即，使r_j愈小愈好。其次，透過反證法吾人可推得[D1]的最佳解必為整數解。具體而言，吾人先假設有一最佳解v_k存在，$0< v_k<1$，假設v_k 為該組最佳解中的最大非整數值，吾人可為該組最佳解定義指標集合I_1, I_2如下：

$I_1 = \{\ i \mid v_i = v_k \}$
$I_2 = \{\ j \mid r_j = v_k \}$

之後，當吾人將每一項v_i與每一項r_j增加δ，則目標函數值會增加$\delta\{\sum_{i \in I_1} d_i - \sum_{j \in I_2} s_j\}$，此時，吾人區分成兩種類型來討論：一是如果$\delta\{\sum_{i \in I_1} d_i - \sum_{j \in I_2} s_j\}$不等於零時，則吾人可以逐步調整最佳解直到$v_k = 1$，因此，當$v_k$ 為介於 0 與 1 的分數時，v_k不會屬於最佳解，換言之，最佳解必為整數解；二是如果$\delta\{\sum_{i \in I_1} d_i - \sum_{j \in I_2} s_j\}$等於零時，則吾人可以將最佳解中的各個分數值均調整到 1 而不會影響目標值。之後，再針對第二大的分數值進行討論，如此週而復始，最後，必然存在一最佳解，其所包含的v_i與r_j 非 0 即 1，均為整數。因此，吾人只需設定$\{v_1, \ldots. v_m\}$，即可獲得前述對偶程式的潛在最佳解如下：

$v_i = 1$ for $i \in P$
$v_i = 0$ else;
$r_j = 1$ for $j \in G(P)$
$r_j = 0$ else.

依據此解，可得(D1)的目標值如下：

$$\sum_{i \in P} d_i - \sum_{j \in P(M)} s_j$$

因此，吾人可將對偶程式重新以下式表達：

$$\underset{P}{Max}\{\sum_{i\in P} d_i - \sum_{j\in P(M)} s_j\}$$

由於對偶程式(D1)的最佳目標值即(1)式的最佳目標值，因此，吾人可得(1)式的最佳目標值為：

$$V(M) = \underset{P}{Max}\{\sum_{i\in P} d_i - \sum_{j\in G(P)} s_j\} \tag{2}$$

其中，P 代表任意一組產品的子集合，而 G(P)則代表至少可生產一種產品 $i\in P$ 且$(i, j)\in\ M$ 的機台所形成的子集合，為了計算特定產品與機台配置 M 之預期產出率，吾人須對(2)式取期望值，結果如下：

$$E[V(M)] = E[\underset{P}{Max}\{\sum_{i\in P} D_i - \sum_{j\in G(P)} s_j\}] \tag{3}$$

由於(3)式並不容易評估，因此，我們首先採用特例($n = m = 3$)分析機器彈性對預期產出率的影響，之後，再利用一般化模式發展假說。

假設製造部門在黃光區擁有 3 部機台($m = 3$)，處理 3 種不同產品($n = 3$)，當個別機台僅能處理單一產品，亦即機器彈性為零時，若產品配置決策達到最佳化時，預期產品需求未被滿足的部分為：

$$\sum_{i=1}^{3} E\{Max[0, D_i - s_i]\} \tag{4}$$

當機器彈性提昇時，每部機台可處理的產品種類數隨之增加。假設在有限彈性(limiting flexibility)下，每部機台可處理兩種產品，當工程部門作出最佳的產品配置決策時，預期產品需求未被滿足的部分為：

$$E\{Max[0, D_1 - (s_1 + s_3), D_2 - (s_1 + s_2), D_3 - (s_2 + s_3), \sum_{i=1}^{3} D_i - \sum_{j=1}^{3} s_j]\} \tag{5}$$

當彈性達到最大時，每部機台可以處理三類不同產品，亦即，三種產品均可分配至各部機台生產，此時，預期產品需求未被滿足的部分為：

$$E\{Max[0, \sum_{i=1}^{3} D_i - \sum_{j=1}^{3} s_j]\} \tag{6}$$

比較(4)，(5)與(6)式，可以發現：(4)式大於(5)式，且(5)式大於(6)式，亦即當機器彈性愈大，產品需求未被滿足的部分愈小，換言之，當總產品需求相同時，有限彈性的產出率高於機台彈性為零時的產出率，而完全彈性(total flexibility)的機台的產出率又高於有限彈性(limiting flexibility)的產出率。

針對有限彈性與完全彈性的比較，以及彈性水準對產出率的影響，吾人可進一步以一般式分析之。假設產品需求為獨立的隨機變數，且產品i的需求D_i符合常態分配$N(\mu_i,\sigma_i^2)$，在機台彈性最高(即完全彈性)時，每部機台具有處理n種產品的能力，在此種情況下，產品需求未能被處理的部分為：

$$E[Max\{0,\sum_{i=1}^{n} D_i - \sum_{j=1}^{m} s_j\}] \tag{7}$$

當機台彈性較低時，亦即機台沒有能力處理所有種類的產品時，預期產品需求未能被處理的部分如(3)式所示，藉由比較(3)與(7)式吾人可評估不同彈性水準下產出率的差異。然而，由於期望值(即(3)式與(7)式)不易直接比較，因此我們改為檢視低機台彈性下產出率低於高機台彈性下之產出率的機率，亦即，比較低彈性水準下產品需求未被滿足的部分大於高彈性水準下的之未滿足產品需求的機率，即如(8)式所示：

$$\Pr[\underset{P}{Max}\{\sum_{j\in P} D_i - \sum_{j\in G(P)} s_j\} > Max\{0,\sum_{i=1}^{n} D_i - \sum_{j=1}^{m} s_j\}] \tag{8}$$

為了進一步證明不論在何種彈性水準下，當彈性水準最高時，機台的產出率達最高，我們認為對任何一產品子集 P，下式均成立：

$$\prod(P) = \Pr[\{\sum_{i\in P} D_i - \sum_{j\in G(P)} s_j\} > Max\{0,\sum_{i=1}^{n} D_i - \sum_{j=1}^{m} s_j\}] \tag{9}$$

假設：

$$f = \sum_{i\in P} D_i - \sum_{j\in G(P)} s_j$$

$$c = \sum_{i=1}^{n} D_i - \sum_{j=1}^{m} s_j - f$$

給定產品集合P，f代表在集合P中的產品需求與最大可用產能的差異，c則代表P的餘集合與生產該餘集合的最大可用產能間的差異。由於我們假設每一產品需求D_i均為符合常態分配$N(\mu_i,\sigma_i^2)$的隨機變數，因此：

$$f \sim N(\sum_{i\in P}\mu_i - \sum_{j\in G(P)} s_j, \sum_{i\in P}\sigma_i^2\ )$$

$$c \sim N(\sum_{i\notin P}\mu_i - \sum_{j\notin G(P)} s_j, \sum_{i\notin P}\sigma_i^2)$$

由於f, c相互獨立，因此可將(9)式重新表示如下：

$$\prod(P) = \Pr\{f > Max(0, f+c)\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Pr\{0 > Max(-f, c)\} \\
&= \Pr\{0 < f\}\Pr\{0 > c\} \\
&= [1-\Phi(z_1)]\Phi(z_2)
\end{aligned} \tag{10}
$$

z_1= -E[f]/ σ[f]， z_2= -E[c]/ σ[c] ，Φ(z) 為一符合標準常態分配之隨機變數的累積分配函數。E[f], E[c]與σ[f], σ[c]分別代表隨機變數f, c的均值與標準差。

假設將產品與機台的配置具體化為每一部機台可處理k種的產品，每一種產品可在k部機台中處理的決策，$2 \leq k < m/2$，且產品需求屬於$i.i.d$的隨機變數，符合常態分配$N(\mu,\sigma^2)$。令產品子集$P = \{i,\ldots.j\}$，$h = |P|$，則因產能限制無法被滿足的產品需求可表示如下：

$$f = D_i + \cdots + D_j - (s_j + \cdots s_{j+k+1})$$

$$= D_i + \cdots + D_j - (h+k-1)s$$

$$c = D_1 + \cdots + D_m - ms - f$$

f, c 均為獨立的隨機變數

$$
\begin{aligned}
&f \sim N(h\mu - (h+k-1)s, h\sigma^2) \\
&c \sim N((m-h)\mu - (m-h-k+1)s, (m-h)\sigma^2)
\end{aligned}
$$

將 f, c 代入(10)式可得：

$$\prod(P) = [1-\Phi(z_1)]\Phi(z_2)$$

$$z_1 = -[h\mu - (h+k-1)s]/\sigma\sqrt{h}$$

$$z_2 = -[(m-h)\mu - (m-h-k+1)s]/\sigma\sqrt{m-h} \tag{11}$$

假設 m 與 μ/σ 為定值，代入(11)式檢視 k 與$\prod(P)$的關係，可發現：$\prod(P)$會隨著 k 的增加而降低，亦即，當機器彈性愈大時，產品需求未被處理的比例愈低，換言之，機台的產出率會隨著機器彈性的增加而遞增。

故而，依據模式的分析結果，本研究提出假說八：

H7: 給定其它條件不變，設備生產力會隨機器彈性的增加而增加。

另一方面，當機台彈性愈高時，機台處理多種生產批量的能力愈強，發生換機的頻率也愈高，依據 Dopuch and Gupta (1994)的實證研究，當生產改變的頻率愈高時，對良率有負向影響，Koste and Malhotra (2000)也提出：範疇彈性的增加與一致性品質之間存在取捨關係，亦即，當個別機台可處理的作業種類愈多，啟動與更換設定的頻率愈高，可能造成一致性品質的降低。在積體電路的製造環境中，由於產品良率對生產環境與物料品質的敏感度很高，當在個別機台上功能轉換的次數愈多時，機台設定的更改愈頻繁，生產環境的穩定性愈低，可能因此增加發生重製或報廢的機率。故而，本研究預期：

H8: 給定其它條件不變，生產品質會隨機器彈性的增加而降低。

關於機器彈性對生產成本的影響，吾人可由晶圓代工的特性觀之，半導體製造業被認為是製程最複雜與資本密集度最高的產業之一，設備成本佔總製造成本的六成以上，因此，在此一產業，產能利用率是決定生產成本的關鍵因素，故而，當設備生產力隨著機器彈性的增加而提高時，可預期地，個別生產批量的製造成本也會隨之下降。據此，本研究推論：

H9: 給定其他條件不變，生產成本會隨機器彈性的增加而降低。