行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告

交易成本及漲跌幅限制下認購權證之最適避險策略

Optimal hedging strategies with transaction costs and price limits

計劃編號：NSC 89-2416-H-004 –013 -

執行期限：88 年 8 月 1 日至 89 年 10 月 31 日

主持人：陳威光　國立政治大學金融系

1. 摘要

根據傳統的 Black-Scholes 世界，在 delta 避險下，只要連續不斷調整避險比率，那麼就可達到無風險投資組合的境界。但是實務上，由於交易成本的存在，連續不斷的調整避險比率似乎不大可行。所以在間斷避險下，由於 gamma 風險的存在，投資組合便存在避險誤差。交易成本和避險誤差似乎存在兩難。如果常常調整避險比率，雖然可以降低避險誤差，但交易成本卻增加；反之，減少調整避險比率次數雖然可以降低交易成本，但卻會大幅升高避險誤差。券商如何在這中間取得平衡，乃是重要課題。另外，由於台灣股票市場有每天 7%的漲跌幅限制，在有漲跌幅限制下，股價的分配不再是標準的對數常態分配，也因此傳統的 Black-Scholes 定價公式是否適用，也是個重要課題。如何調整 B-S 模型使能適用於台灣權證價格，也是重要課題。本研究的主要目的在推導出在交易成本及避險誤差兩難下，最合適的避險策略，另外本研究也嘗試再加入漲跌幅限制條件，最適避險策略該如何修訂，本文也應用 Monte-Carlo Simulation 的方法模擬避險策略的績效。

關鍵詞：認購權證，交易成本，delta 避險，避險比率，避險誤差，Black-Scholes，漲跌幅限制

1. Abstract

According to the traditional Black-Scholes world, the risk-free portfolio can be achieved by continuously adjusting the hedge ratio (delta-neutral hedge). However, in a real world, the transaction costs invalidate the Black-Scholes arbitrage argument for option pricing, since continuous revision implies infinite trading. The infinite trading will induce a huge amount of transaction costs. Hence, the hedgers are in dilemma. They face the trade-off between the transaction costs and the hedge error that occurs from the discrete revision. The purpose of this project is to develop an optimal

hedging strategy for security firms that issue the call warrants. The regulation of 7% price limit on Taiwan stock prices is also taken into account for setting the hedging strategy. The Monte Carlo simulation approaches are used to compare the performance of different hedging strategies.

Key Words：warrant, transaction costs, delta hedge, hedge ratio, Black-Scholes, price limits, hedge error

2.導言

自從86年9月4日大華證券的國巨及太電兩支認購權證及寶來證券的房地產組合認購權證上市交易以來，到89年底共有126檔個股或組合型權證上市交易，可謂盛況空前。一般券商在發行認購權證方面，除了標的股票(underlying stock)的選取，以及權證的定價上需要深入研究探討以外，避險策略的擬定對券商而言也是非常重要的課題。根據傳統的Black-Scholes世界，在delta避險下，只要連續不斷調整避險比率(hedge ratio)，那麼就可達到無風險投資組合的境界。但是實務上，由於交易成本的存在，連續不斷的調整避險比率似乎不大可行。所以在間斷避險下，由於gamma風險的存在，投資組合便存在避險誤差(hedge error)。交易成本和避險誤差似乎存在兩難。如果常常調整避險比率，雖然可以降低避險誤差，但交易成本卻增加；反之，減少調整避險比率次數雖然可以降低交易成本，但卻會大幅升高避險誤差。

Leland (1985) 認為在考慮了交易成本後，連續不斷的調整避險比率幾乎不太可能的。作者考慮了交易成本及調整避險比率的頻率，而導出與Black-Scholes模型相似的公式。和B-S的差別在於Leland模型中股價報酬率的變異數是傳統的變異數再乘上一個調整因子，此調整因子和交易成本呈現正向的關係，而與重新調整避險比率的期限呈反向關係。Etzioni (1986) 在投資組合複製上採用三種避險比率策略來評斷交易成本下，複製組合之優劣。此三種策略為 (1)、定時調整避險比率(time discipline) (2)、固定容忍範圍避險比率(market move discipline) (3)、落後避險比率(lag discipline)，作者以Monte Carlo Simulation下，發現第三策略表現最佳。

Wilmott (1994) 認為既然無法達到完全避險，那麼風險中立(risk-neutral)的假設就有加以修正的必要。作者加入股價的預期成長率 (μ) 於Leland (1985)的波動度調整公式中，也因此風險偏好(Risk Preference)被引入作者的公式中。此外Wilmott也認為雖然投資者可以認同將間斷避險的風險加入權利金中，並不認為應加入交易成本，因此投資者能接受的權證價格，較發行者的定價為低。Howe, Rustem and Selby (1994)提出Minimax避險法，其基本概念乃建立在對下一期股價的預測中最不利的狀況，然後在經由最小化目標函數求得最小避險誤差。

Russell, Sanders and Schachter (1996)提出最小變異避險法，作者將原來的避險比率，以最小化避險比率的變動，求出一個調整係數，此新的避險比率和股價變動及買權變動之共變異數有關。

Whalley and Wilmott (1997) 延續 Davis 等人(1993)的研究，作者認為在小量的交易成本下，選擇權的邊界條件可簡化為和股價及時間有關的二維空間，作者導出一個簡單的公式作為避險策略的依據，這中間牽涉到選擇權 gamma 的引入。

另外，由於台灣股票市場有每天 7% 的漲跌幅限制(price limit)，在有漲跌幅限制下，股價的分配不再是標準的對數常態分配，也因此傳統的 Black-Scholes 定價公式是否適用，也是個重要課題。如何調整 B-S 模型使能適用於台灣權證價格，也是重要課題。

在漲跌幅限制方面，Ma，Rao and Sears (1989)利用美國債券期貨資料實證，發現漲跌幅限制有冷卻效果(Cool-off Effect)，同時可降低價格波動。Ma (1993)，以及 Lee and Kim (1995) 分別以台灣的股票及韓國的股票做實證，也發現和 Ma，Rao and Sears 同樣的結論。然而 Chen (1993) 利用台灣的股票資料實證，卻發現漲跌幅限制會加大股價波動程度。

本研究的主要目的在嘗試推導出在交易成本及避險誤差兩難下，最合適的避險策略，另外本研究也嘗試再加入漲跌幅限制條件，最適避險策略該如何修訂，本文也將應用 Monte-Carlo Simulation 的方法模擬避險策略的績效。

3.避險模型

Leland(1985)以調整變異數的方法，將交易成本對權證價格的影響加入股價變異數的估計內，其調整之變異數公式如下：

$$\sigma'^2 = \sigma^2[1+\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{k}{\sigma\sqrt{\delta t}}]$$

其中 k 代表按交易金額課徵的比例稅，用此調整後的波動度代替 B-S 公式中的波動度，來建構避險組合。

Wilmott(1994)發現，當考慮了交易成本時，因為必須採用間斷避險，因而會產生新的風險。Wilmott 推導出的波動度調整式如下：

對避險者而言：

$$\hat{\sigma} = \sigma(1+\frac{\delta t}{2\sigma^2}(\mu-r)[(3(\mu-r)+\sigma^2]+\frac{k}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}$$

Whalley & Wilmott(1993)利用 Davis et.al.的方法，加入比例稅交易成本，並簡化其運算過程，將解效用極大時所遇到的三維無邊界條件問題簡化為方便運算的一個帶狀區間，如果避險比率在此區間內波動，則不會發生交易，若超出範圍，則必須要調整避險比率至此區間的邊界上，Whalley & Wilmott 導出的區間公式為：

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \pm [\frac{3kSe^{-r(T-t)}(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2})^2}{2\lambda}]^{1/3}$$

其中λ即為投資人在指數型態效用函數之下的風險嫌惡係數，當λ越大時，代表該投資人越厭惡風險，因為若λ越大時，可以看到式子中的分母變大了，連帶使得整個無交易帶區間變小，亦即可以容忍的誤差較小，就表示避險者是比較嫌誤風險的，此外，公式中亦將 gamma 風險（$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$）對避險比率的影響考慮在內。

4.考慮漲跌幅限制的股價

假設真實的股票價格行為不會受到漲跌幅限制的影響，漲跌幅的存在只會延緩股價觀察值收斂至股價真值的時間而已。我們可以由下式得到第 i 期股價觀察值與股價真值的關係：

$$S_i=\begin{cases} S_{i-1}\cdot(1+L_u) & if\ S_i^*\geq S_{i-1}\cdot(1+L_u) \\ S_{i-1}\cdot(1+L_d) & if\ S_i^*\leq S_{i-1}\cdot(1+L_d) \\ S_i^* & if\ S_{i-1}\cdot(1+L_d)<S_i^*<S_{i-1}\cdot(1+L_u) \end{cases}$$

其中 S*即為真實股價，S 為市場觀察到的股價，L_u 代表股票之漲幅上限，L_d 代表股票之跌幅下限。如果本期股價漲幅大於上一期收盤價乘上漲幅限制，或股價跌幅大於上一期收盤價乘上跌幅限制時，則股價觀察值等於上一期觀察值乘上漲（跌）幅比率，當真實股價漲跌未碰觸上期觀察值乘上漲（跌）幅比率時，則市價就等於真實股價。

若將上式以報酬率型態表示，則可以得到下式：

$$R_i=\begin{cases} l_u & if\ \ln(S_i^*/S_{i-1})\geq l_u \\ l_d & if\ \ln(S_i^*/S_{i-1})\leq l_d \\ \ln(\frac{S_i^*}{S_{i-1}}) & if\ l_d\leq\ln(S_i^*/S_{i-1})\leq l_u \end{cases}$$

其中 R 為連續複利股票報酬率的觀察值，$l_u=\ln(1+L_u)$，$l_d=\ln(1+L_d)$。因此可以看出來，股價報酬率有無碰觸到上下限，並非決定於真實的股價報酬率 $\ln(S_i^*/S_{i-1}^*)$，乃是決定於本期真實股價相對於上一期股價觀察值的報酬率 $\ln(S_i/S_{i-1}^*)$，我們可以將其拆開成為兩個部分，就可以得到下式：

$$\begin{aligned}\ln(S_i^*/S_{i-1}^*) &= \ln(S_i^*/S_{i-1}^*)+\ln(S_{i-1}^*/S_{i-1})\\ &= R_i^*+LO_{i-1}\end{aligned}$$

其中 LO_{i-1} 表示了因為漲跌幅的限制，使得上一期股價觀察值未反映到真值的部分，遞延到本期來，因此，我們稱之為「遞延效果」(left-over effect)，因此我們可以得知，今天股價是否會碰觸到漲跌停板，會受到上一期是否碰觸到漲跌停板的影響。在本模擬當中，漲跌停幅度為符合台灣市場的現況，因此各訂為 7%。

5. 避險績效衡量

產生了股價之後，在第一期時，我們依照 Black & Scholes 的公式買入 Δ_1 股的股票，以建構期初避險組合，並賣出一單位的認購權證，則在這種情況之下，定義期初投資（initial investment, IV）為：

$$IV=-\Delta_1*S_1-V_1$$

其中 S 代表股票價格，V 代表權證價格，日後在調整避險部位時，就會產生損益，我們定義每一次避險所帶來的損益（profit-loss, PL）為：

$$PL_i=[\Delta_{i-j}*S_i-V_i]-[\Delta_{i-j}*S_{i-j}-V_{i-j}]$$

即為 t = i - j 避險時所建立的避險組合，到 t = i 要調整前，所造成的誤差，如果避險時段越長，或避險比

率波動越大時，則造成的誤差就會越大。

而每次避險時，都會有現金的流入或流出，我們假設當投資人買入股票時，就將現金投入避險組合中，而處分掉部分股票時，亦馬上獲得現金的流入，則避險時現金流量(cashflow, CF）的變化可以用下式表示：

$$CF_i = -[\Delta_i - \Delta_{i-j}] * S_i$$

從式中我們可以看到，當本期調整避險組合時的避險比率高於現在持有的股票（Δ_{i-j}）時，就必須以 S(i)的價格買入不足的股票部分，因而造成現金的流出。

而買賣手中股票的時候，必須支付交易費用，按照現行台灣證券交易所的規定，買股票時不用課徵稅，只有在賣股票時必須繳交交易稅，因此，我們可以將交易費用（tax, T）表示如下：

$$T_i = \begin{cases} -k * CF_i & if\ CF_i > 0 \\ 0 & if\ CF_i < 0 \end{cases}$$

其中 k 代表每次賣出股票隨交易金額課徵的交易成本，為符合台灣市場的現況，模擬時即令 t=0.3%。

而在期末，我們必須考慮交易發生的時間價值，計算出總損益，總現金流量，以及總交易費用，為了方便運算，我們就採當交易發生時，就累積起來的方式，以避險損益為例，總避險損益（total profit-loss, TPL）如下式：

$$TPL_i = TPL_{i-1} + PL_i * e^{r\Delta t}$$

其中Δt為第i期距離到期日的時間，以年來表示，式中可以看到，我們是採用當損益發生時，就以發生的時點將其複利到到期日，再將所有損益加總起來，而總現金流量，總交易費用的處理方式亦同於總避險損益的方法。

本文中以單位風險報酬率（即μ/σ）作為標準，其觀念同於 Sharpe ratio，當此比率越高時，代表每多承擔一單位風險，可以得到的預期報酬率越高。

6. 模擬結果

本研究方法為依據股價波動的一定比例，作為調整避險部位的依據，當股價波動幅度超過預先設定的容忍範圍時，我們就對手中的避險部位進行調整，與固定時段避險法相同的，每次調整避險比率，皆以調整至 delta 中立為準。

本文設定對股價波動的容忍程度，從 1%到 6%，模擬結果如圖 1 所示。

結果可以發現當加入了 7%的漲跌幅限制時，避險帶寬度設定為 2%的表現較 1%為佳。如果對照圖 1 就非常的明顯，單位風險報酬率在 2%的避險帶寬度之下達到最高，然後隨著避險帶寬度的放寬而降低。

由表中我們可以看到，當交易成本大幅提高至每一次賣出股票就課徵 0.6%的交易成本時，報酬率即明顯下降，報酬率的波動度亦有上升的情形，因此造成單位風險的報酬率的大幅的下跌。在有漲跌幅限制的情況之下，單位風險報酬率最高出現在避險帶寬度為 3%的地方。對應圖 2 更可以明顯看出當交易成本大幅增加至

0.6%時，單位風險報酬率對應避險帶寬度的關係。在存在 7%漲跌幅限制之下，會在避險帶寬度設定為 3%的地方出現明顯的轉折。

7. 結論

本文發現固定間隔避險中的每天避險，固定避險帶避險中無漲跌幅限制的 1%避險帶寬度，有漲跌幅限制的 2%避險帶寬度等績效最佳。但倘若我們將交易成本從賣出股票隨價課徵 0.3%交易稅增加到賣出股票隨價課徵 0.6%以及 0.9%交易稅，會發現隨著交易成本的增加，最適避險帶寬度增加，如當交易成本為 0.6%時，最適避險帶寬度為 3%，當交易成本為 0.9%時，最適避險帶寬度為 7%，因而使避險帶寬度與單位風險報酬率之關係出現轉折的現象。即存在越高的交易成本時，避險策略所選擇的避險天期或避險帶寬度就需要越高，以免蒙受交易成本帶來的損失。

8. 參考文獻

陳威光，1998，「認購權證價格之探討」，元大期貨，pp. 57-64

陳威光，「選擇權—理論、實務與應用」，2001，智勝出版公司

Black, F., and M. Scholes (1973): “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” Journal of Political Economy, 81, 637-654.

Boyle, P. P., and T. Vorst (1992): “Option Replication in Discrete Time with Transaction Costs,” Journal of Finance. 47, 271-294.

Chen, Y. M. (1993): “Price Limits and Stock Market Volatility in Taiwan,” Pacific-Basin Finance Journal, 1, 139-153.

Davis, M. H. A., V.G. Panas, and T. Zariphopoulou (1993): “Portfolio Selection with Transaction Costs, ” SIAM Journal of Control and Optimization, 31, 470-493.

Etzioni, E. S. (1986): ”Rebalance Disciplines for Portfolio Insurance,” Journal of Portfolio Management, Fall, 59-62.

Howe, M. A., B. Rustem, and M. J. P. Selby (1994): “Minimax Hedging Strategy,” Journal of Computational Economics, July, 245-275.

Lee, Sang-Bin and Kwang-Jung Kim (1995): “The Effect of Price Limits on Stock Price Volatility: Empirical Evidence in Korea,” Journal of Business Finance and Accounting, 22, 257-267.

Leland, H. E. (1985): “Option Pricing and Replication with Transaction Cost,” Journal of Finance, 40, 1283-1301.

Ma, C., R. Rao and S. Sears(1989): “Limit Moves and Price Resolution: the Case of the Treasury Bond Futures Market,” Journal of Future Market, 9, 321-335.

Ma, Tai(1993): “Price Limits, Margin Requirements and Stock Market Volatility: An Empirical Analysis of the Taiwan Stock Market,” Research in International Business and Finance, 10, 229-251.

Mohamed, B. (1994): “Simulation of Transaction Costs and Optimal

Rehedging," Journal of Applied Mathematical Finance, 1, 49-62.
Whalley, A. E., and P. Wilmott(1994): "Hedge with an Edge," Risk Magazine, 7(10), 82-85.
Whalley, A. E., and P. Wilmott(1997): "An Asymptotic Analysis of an Optimal Hedging Model for Option Pricing with Transaction Costs," Journal of Mathematical Finance, 7, 307-324.
Wilmott, P.(1994): "Discrete Charms," Risk Magazine, 7(3), 48-51.

圖 1　固定避險帶避險法之避險績效

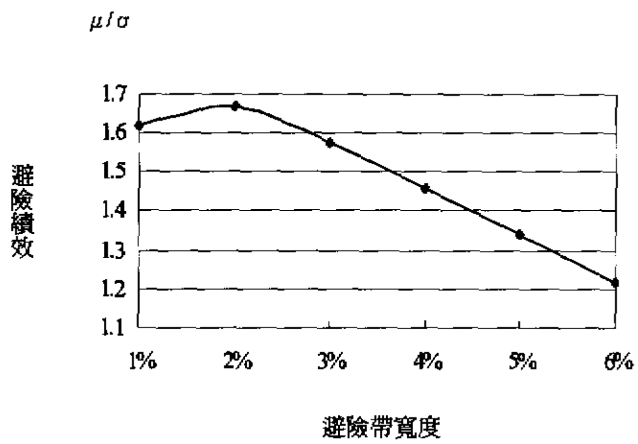

圖 2　交易成本為 0.6%時之固定避險帶避險績效