

行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告

界限選擇權之評價與避險-以 ADAPTIVE MESH MODEL 來增加三元樹評價的效率

The valuation and hedging of barrier option-The Adaptive mesh model approach

計劃編號：NSC 89-2416-H-004 -063

執行期限：89 年 8 月 1 日至 90 年 10 月 31 日

主持人：陳威光 國立政治大學金融系

1. 摘要

Ritchken(1995) 三元樹狀模型常用來評價界限選擇權，但是當界限價格非常接近期初股價時，會出現模型不效率的狀況，需要模擬非常多的期數才能收斂；另外，Ritchken 也無法處理界限價格隨時間改變或間斷觀察的界限選擇權。本文目的在延伸 Adaptive Mesh Model(1999)具有高解析度的細網結構概念於重設型認購權證的評價上，並且擴充到連續觀察與間斷觀察下的一些複雜的重設選擇權。本文應用 Adaptive Mesh Model 於下生效界限選擇權，設置適當之細網結構，求出較 Ritchken(1995)更精確、更快速的重設選擇權價格。此外，在納入 Adaptive Mesh Model 的下生效界限選擇權不論用來評價歐式或美式重設選擇權，均可以獲得良好的收斂效率。

關鍵詞：界限選擇權，重設型認購權證，Adaptive mesh 模型，三元樹模型

1. Abstract

The shortcoming of trinomial approach in valuing barrier option is when the asset price is close to the barrier. It needs a very large time steps to converge to the theoretical value. This paper uses Adaptive Mesh Model to reduce nonlinearity error by putting one or more small sections of fine high-resolution onto a tree in valuing reset options. This paper finds that the accuracy and convergence increase by use of AMM compared to trinomial approach in valuing reset options. Besides, AMM approach can also been used in pricing American barrier options.

Keywords: Barrier options, reset options, Adaptive Mesh Model, trinomial model

壹 導言

重設選擇權是近年來非常熱門的衍生性金融商品，國外早已有此種商品，台灣在民國 87 年 10 月大華首先推出大華 04 中環重設型認購權證，重設選擇權的評價大多由下生效型界限選擇權著手，但是除了少數標準歐式界限選擇權已經有封閉解外，大部份特殊條款的界限選擇權，例如美式，或更複雜條款之界限選擇權，仍然沒有封閉解，大部份使用樹網模型來求得逼近解。但是 Boyle and Lau(1994)發現在二元樹評價界限選擇權時，會產生鋸齒狀收斂的評價誤差問題，甚至在期數增多下還是如此。鋸齒狀評價誤差的原因是界限價格與樹狀方格結點有不重合的情況。Ritchken(1995)利用 Boyle 三元方格模型，同時多引入一個參數來增加模型的自由度，不僅使界限價格與樹狀方格結點沒有產生不重合的情形，因而減少鋸齒狀評價誤差，同時模型的操作者也可隨意調整期數來減少分配收斂的誤差。但是 Ritchken 模型在界限價格非常接近期初股價時，會出現模型不效率的狀況，需要模擬非常多的期數才能收斂。另外，Ritchken 也無法處理界限價格隨時間改變或間斷觀察的界限選擇權。

Figlewski and Gao(1999) 提出 The adaptive mesh model(簡稱 AMM)，對樹狀模型在處理選擇權時所出現的非線性誤差提出改進的方法。AMM 本身建構在三元樹狀模型上，大部份的樹狀結

構是粗網結構所構成，然後再針對容易產生線性誤差的地方設置細網結構，以提高這些部位的解析度，而這些部位的細網結構部的愈密集時，非線性誤差就可以在不增加期數，獲得明顯的改善。本文運用 AMM 來處理界限選擇權所面臨的問題。AMM 以具有高解析度的細網結構來減少誤差，並且在計算的效能上較 Ritchken(1995)的三元樹模型有非常顯著的效果。本文延伸 AMM 的概念於重設型認購權證的評價上，並且擴充到連續觀察與間斷觀察下的一些複雜的重設選擇權。

貳 AMM 模型

一、樹網模型評價選擇權的誤差

樹網模型評價選擇權時，通常會出現兩種不同型態的逼近誤差：即分配誤差和非線性誤差。由於樹網模型是利用間斷的二元或三元機率分配來逼近連續的股價對數常態分配，因此期數少時，誤差愈大，增加期數，誤差會下降，此為分配誤差。選擇權價格在某些區域會有非線性或不連續的現象，稱為非線性誤差。例如在到期日執行價格的部份，或者是界限選擇權的界限價格部份，一旦股價經過這些部份，股價有一點點變動，就會讓選擇權的價格跳動很大，即碰到界限價格與否，價格差異很大。非線性誤差一旦產生，就必須以增加期數的方式來消除，而且增加期數至某一特定數量時，非線性誤差又會再度產生，只是波動的幅度會較前一次減少。如圖 1 所示(略)，降低非線性誤差就是像圖中波動幅度的減少，降低分配誤差就是使圖形中的線收斂到真值。

二、執行價格附近的 AMM

在樹網模型的建構下，以歐式選擇權為例，利用 AMM(1)〔一階細化〕來說明整個細化過程：由圖 2(略)看出 AMM 三元樹狀結構本身就是粗網結構(coarse mesh)，其每一個價階(即股票至下一期上升或下降的幅度)與時階分別是 h 和 Δt ，一階細化後的價階與時階將變為 $\frac{h}{2}$ 和 $\frac{\Delta t}{4}$ 。那麼到期日與到期日前一期的執行價格附近為一階細化的區域。而因為我們細化的價階為原來價階的一半，故新的時階為原來時階的 1/4，換言之，就是原來再隔一期就是到期日，現在則是需要經過四期才能達到，而到期日的標的資產價格數量會是原本的兩倍寬。

三、界限價格附近的 AMM---間斷觀察界限選擇權

在間斷觀察的界限選擇權整個存續期間中，並非時時刻刻都要去觀察標的股價是否有碰到界限價格，只有在某些時點需要判斷是否碰到界限價格。而間斷觀察界限選擇權的型態不只這一種，發行者可以任意設定，只要不要整個存續期間做連續觀察是否有碰到界限價格的界限選擇權，都是可以歸類為間斷觀察界限選擇權。雖然 Ritchken 在評價連續觀察界限選擇權時很有效率，但是在評價間斷觀察界限選擇權時，則會產生很大的收斂誤差。因此需要在界限價格附近做細化處理，基本上此種界限選擇權存在兩個地方會產生非線性誤差，一個在執行價附近，另一個在界限價格附近，而此處我們將重點放在界限價格附近的細化處理，而執行價格附近的細化結構，其理論同前，故不再贅述。

基本上，在界限價格附近做細化結構處理其做法和歐式選擇權在執行價的附近之細化結構相同，但是在此與歐式選擇權略有不同的地方是：歐式選擇權的細化結構本身直接是由選擇權的邊界條件而來，在取得細化結構最後一期資料基本上沒有問題，但是間斷觀察界限選擇權之界限價格附近的細化結構，其最後一期結點的訊息是由粗網結構而得，故在細網結構與粗網結構勢必透過某種方法來連結，構處理後，只需要花費 300 期左右就可以收斂到真值。

四、界限價格在整段連續觀察期間很靠近期初股價的情形

如果兩個價格靠很近，因為期初股價無法在下一期就到達界限價格，故非得增加很多期數才能達到界限價格，進而降低評價誤差。不過如此必須耗費大量運算時間，非常沒有效率。AMM 在此就提供另外一種方法：

步驟一：既然界限價格與標的股價的距離很近而未能將第一期結點與界限價格重合，則不如把原來的樹狀結構(粗網結構)整個往上移動，使界限價格與第一期結點能夠重合，而此時粗網結構的期初股價就不是 S，而是界限價格乘上一個上升價階。由此粗網結構我們引用 Ritchken 方法來求算整個粗網結構的每個結點價格。而這些粗網結構的結點價格是為了去計算細網結構所需要的。

步驟二：我們要粗網結構的訊息傳導至細網結構。如同我們在歐式選擇權中所述，期初股價與粗網結構的期初股價相差一半的價階，所以期間會有相差四分之一，故粗網結構要在界限價格附近以四分之一期的方式將粗網結點的價格訊息傳導至此，且期間愈前面的結點要包含其後面所有結點的所有訊息。如此粗網結構的價格訊息就可以在第三步時傳導至細網結構了。

步驟三：細網結構由粗網結構的最後一期結點開始，一期一期往前推算，一直求算到第零期，就可求得界限選擇權價格。

以上為 AMM 的一階細化(稱 AMM(1))求算界限選擇權，圖 15(略)是進一步說明當界限價格更接近標的股價時，AMM(1)此時也因為期數必須還要放大而增加電腦運算時間，逐漸不效率。因此我們會更加需要進一步的細化。AMM(2)的做法就是將 AMM(1)再重複一次，只是粗網結構的期初股價是細網結構期初股價的四分之三價階。

經過上述模型設定，我們求算出下生效與下出局界限選擇權。綜觀上述各項模擬結果，可以發現在 AMM 結構中，以 100 期以上，500 期以下之 AMM Level 比較準確，計算效率也較快，故模擬結論是：標的股價與界限價格有多接近，才用多少階的細化水準，絕對不是愈細化愈好，至於是否可由標的股價與界限價格來判斷該用多少階細網結構，此較不明顯做推定，但是只要掌握期數能夠在上述區間中，一定會得到相對 Ritchken 較效率的結果。

由表三(略)得知 Ritchken 模型，也就是無任何細網結構下的 AMM(0)，其即使跑 2000 期還是存在很大的誤差，而且必須花費 1 分 39 秒才可算完，反觀 AMM(2)較精確，且只須 3 秒即可算完。故依照此型態的細網結構處理當界限價格與標的股期初股價很近的問題時，會獲得比 Ritchken 更有效率的結果。

參 Adaptive Mesh Model 評價重設選擇權

評價重設選擇權的基本概念與評價下生效界限選擇權相似，理論上不同種類重設選擇權也可以由相對應的下生效界限選擇權概念來評價。

一、單點單價重設選擇權

單點單價重設選擇權是指投資人可在選擇權契約規定的單一個重設時點判斷是否有發生重設的情形，若符合重設條件，則投資人可以用期初規定好的較低執行價格於到期日時進行履約，否則還是以原定之執行價格來執行履約。

雖然同樣可以使用 Ritchken 的樹網模型來分析，但是模擬的結果如同在單一觀察時點下的界限選擇權一般，必須花費很多模擬期數才能收斂至真值，因此改採 AMM 結構下的樹網模型來分析，圖 12(略)是引入 AMM 評價單點單價間斷觀察重設選擇權的圖形。在評價單點單價重設選擇權時，只要在重設時點(圖 12 之 $t=5$)時，判斷是否重設，在虛線部份是未達重設條件的情形，則在此重設時點重設價格以上的結點接執行價為 K 的 Tree，而在實線部份是重設價格以下的結點則接執行價格是 K_1 的 Tree。之後再以期望值折現的概念求得單點單價重設選擇權的價值。

圖 12(略)是加入細網結構來評價重設選擇權的樹網模型圖，而相同於上述界限選擇權的細網結構設置方法，只是符合條件的細網結構其所接續的結點是 K_1 的 Tree，而未符合重設條件的細網結構，其所接續的結點是 K 的 Tree，至於如何由粗網結構到細網結構，或是由細網結構到粗網結構，這傳導過程相同，故不再贅述。

圖 13(略)是評價單點單價間斷觀察重設選擇權的模擬結果。期初股價 100、執行價 100、波動度 0.6、利率 6%、存續期間 1 年、重設價格 90、重設觀察時點：0.5 年、重設後執行價 90。

圖 13(略)的間斷觀察重設選擇權，重設期間設在半年的一個觀察時點，而整個重設選擇權距到期日有一年，在 AMM 結構的三元樹網模型下，若不採用任何細化結構，則價格波動幅度非常大，依本例而言，八階細網結構下，大約花費 300 期左右就可以收斂到不錯結果，當然如果使用更高階細化結構來評價，則花費更少的期數，且會獲得更佳的收斂效果。至於執行效率方面，由於重設選擇權的樹網模型評價法無論是用 AMM 或是 Ritchken 模型，兩者方法相同，唯一產生不同的是在 AMM 多設置了細網結構，因此兩種模型的執行效率與上述界限選擇權的結果相同，故本章後續所探討的各種類型下的重設選擇權將不討論執行速度的問題，而把焦點放在各種細化階數 (AMM level) 與期數 (n) 下的重設選擇權價格的鋸齒狀收斂問題。

二、 整段期間連續觀察重設選擇權(整段單價重設選擇權)

評價整段單價重設選擇權的模型是以 Ritchken 模型為主，假設重設選擇權的重設價格與期初標的股價不是很近的情形下，我們可以直接以 Ritchken 評價整段單價重設選擇權。雖然重設選擇權可視為下出界與下生效兩個界限選擇權的組合，但為了能進一步推算美式重設選擇權的價格，則如同前述幾節，直接以樹網模型來分析。

重設選擇權在重設後是以重設後的執行價做為剩下存續期間的執行價，故重設價格以下的樹網結構是標準選擇權的樹網結構。而重設價格以上之樹網結構是下出界型的界限選擇權形態，只是在標的股價低於重設價格時，並非直接出局，而是轉換成新執行價的標準買權，因此重設選擇權的樹網模型便由此推算出來。

三、 adaptive Mesh Model 評價重設價格與期初標的股價很近的整段單價重設選擇權

另外如同界限選擇權，重設選擇權的重設界限價格與期初標的資產價格很接近時，也會像界限選擇權一般，必須花費很多期，和很久的時間，才能求得精確的價格。這個問題會變得很重要，因為或許一開始發行重設型認購權證時，我們可以將重設界限價格與期初標的資產價格差距放大來避免此一發行問題，但是發行後標的資產價格是隨機波動的，誰也無法保證何時標的資產價格會和重設價格離得很近，況且重設型認購權證的一項重要特性就是當標的資產價格即將符合重設條款時(也就是重設價格與期初標的資產價格很接近時)，該權證的評價與避險就顯得非常敏感，這個特性對於發行券商與投資人而言非常重要。以 Ritchken 模型來計算重設選擇權價格其實效率還不錯，只是在標的股價與重設價格很近時的評價效率會非常差，故在此同樣應用 AMM 細化結構模型來解決此一問題。

表五(略)是 AMM 評價重設價格與期初標的股價很近的整段單價重設選擇權，評價誤差在 0.03% 左右，重設價格愈接近期初標的股價，需要愈高階的細網結構，相對程式執行所花費時間也愈久。Ritchken 模型在本產品下即是 AMM(0) 的情形，得到的結論是：

- 1、Ritchken 模型在股價與重設價格愈近時，愈無法使電腦順利運算出價格。
- 2、重設價格愈接近期初標的股價，需要愈高階的細網結構。但是不可以一味追求高階細化，還必須考量在高階細化下，期數變少，分配誤差變大。

雖然本單元所舉的例子已經有公式解，但以相同的觀念可以用在其他無公式解存在的產品上，例如某個區段連續觀察重設選擇權。

肆 結 論

由 Adaptive Mesh Model 來評價各種型態的重設選擇權，主要在解決傳統 Ritchken 樹網模型在運用上會出現的問題：包括當重設價格與期初標的資產價格很接近時，很難有效率的評價出合理重設選擇權價格。這也是目前許多以 Ritchken 為基礎來開發重設型選擇權樹網模型皆會面臨的問題。另外，Ritchken 模型在評價間斷觀察重設選擇權時也會產生收斂的誤差，導致評價上的錯誤，故本文也針對此問題找出更有效率的辦法。

本文運用 Figlewski 和 Gao(1999)提出的 Adaptive Mesh Model 來處理界限選擇權所面臨的問題。以在具有高解析度的細網結構來減少誤差，並且在計算的效能上獲得非常顯著的效果。然

而 Adaptive Mesh Model 雖然提出非常有效的方法來規避這些問題，但重點是建立細化結構的過程當中，會因為選擇權的不同，而必須有不同的細化結構配置，故 Adaptive Mesh Model 的應用本身極具靈活性，視該商品評價特性而呈獻不同的細化結構。

本文的貢獻首先在於運用細網結構的觀念來解釋並且實際演算出選擇權評價的效率性：以評價單點單價界限選擇權為例，八階細網結構與 Ritchken(1995)的樹網模型，前者的執行結果在計算 300 期下比後者計算 1000 期精確，而且在計算時間上前者計算 3 秒，而後者計算時間則需要 30 秒，故在 AMM 下花費較少的期數與時間，而且得到更精確的結果，顯而易見加入細網結構的樹網模型效率多了。本文也開發 Adaptive Mesh Model 應用在整段或區段連續觀察的下生效界限選擇權之細網結構推演，以解決上述 Ritchken 模型所面臨的問題。在後續研究方面，AMM 樹網模型可應用於美式重設選擇權評價，使用美式下降生效界限選擇權的原理來探討。在納入美式條款下的 Adaptive Mesh Model 完全不減損任何效能，故 Adaptive Mesh Model 在樹網模型的發展上，具有極寬廣的發展空間。

參考文獻:

Ahn ,Dong-Hyun , S ,Figlewski., and B. Gao. “Pricing Discrete Barrier Options with an Adaptive Mesh Model “ *Journal of Derivates*, 2(1999), pp.33-43

Boyle , P.P., and S.H. Lau “Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method.” *Journal of Derivates*, 2(1994), pp.6-14

Boyle , P.P., “A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables.” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23(March 1988), pp.1-12

Chen, Wei-Kuang (陳威光) , “The Valuation Of Reset Options,” *Chinese Financial Association Annual Conference 1999*

Cheuk, T.H.F. , and T.C.F. Vorst. “Complex Barrier Options” *Journal of Derivates*, 4(1996), pp.8-22

Derman ,Emanuel, Iraj Kani , Deniz Ergener , and Indrajit Bardhan .”Enhanced Numerical Methods for Option with Barriers ”*Financial Analysts Journal (Nov-Dec 1995)*”

Figlewski, S., and B. Gao. “The Adaptive Mesh Model : A New Approach to Efficient Option Pricing.” *Journal of Financial Economics*, 1999 pp313-351

Gray, F.S. and R.,Whaley,”Valuing S&P 500 Bear Market Warrents with a Periodic Reset,” *Journal of Derivates*, 5,1(Fall 1997), pp.99-106

Lee , Tsun-siou (李存修) , Yue-xian Lin(林岳賢) “重設選擇權之評價與避險操作” *Chinese Financial Association Annual Conference 1999*

Ritchken, P. “On Pricing Barrier Option.” *Journal of Derivates*, 3(1995), pp.19-28

圖 1 不同細化程度之 AMM 收斂情形

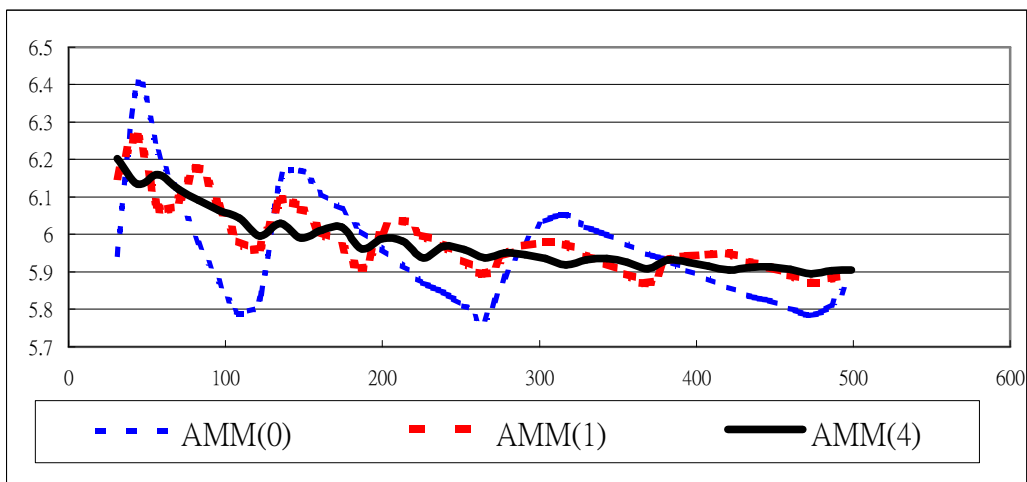


圖 3 以 AMM 評價間斷觀察界限選擇權：

AMM(1):考慮一階細網結構的三元樹網模型

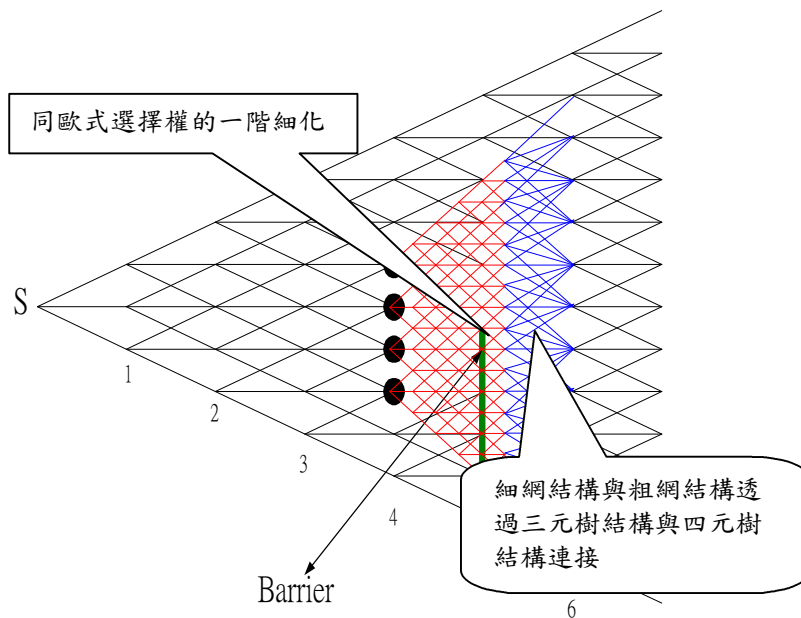


圖 5 以 AMM 評價間斷觀察界限選擇權：加入一階細網結構的效果。

