第二章 文獻探討

第一節 EIA 商品介紹

目前市面上的 EIA 商品，提供各種不同收益的現金流量，我們大致上可將其分為兩大類，一為單收一金流連結單股權資產，另一類為多資產連結現金流量。本文主要針對 EIA 現金流量及相關多資產連結現金流量做探討。

一、 單資產連結

從 Hardy (2003)的著作可知標準化的 EIA 商品共分為三類，分別為點對點（Point-to-Point，PTP）、高水檔（High Water Mark）和年度重設（Annual Ratchet）。由於 EIA 現金流量十分複雜，先定義相關變數：

t：表示時間， $0 \le t \le T$ ，可以月、季、年為單位，0 表示起始日，T 表示標的價值的到期日。

I_t^i： 第 i 檔連結標的 (reference index) 在時間t的價值 (value) ，標的可為個股或是指數，$0 \le t \le T$ ，$1 \le i \le N$ 。若只有一檔連結標的，則上標 i 可省略。

α^i：第 i 檔連結標的的參與率，$1 \le i \le N$ ，若只有一檔連結標的，上標 i 可省略。

P ：本金。

F ：為單期或各期的保證收益率；若多了下標g，亦即F_g則代表為全域（global）下限率。

C ：為單期或各期的上限率；若多了下標g，亦即C_g則代表為全域（global）上限率。

G ：到期保證給付（Guaranteed amount）。

接下來，分別針對此三類現金流量做探討。

1. 點對點（Point-to-Point，PTP）：PTP 為 EIA 中最簡單的契約，只看到期日的指數和期初指數的報酬率。以下為 PTP 在 t 日的現金流量：

$$Max\left\{P\left(1+\alpha\left(\frac{I_T}{I_0}-1\right)\right),G\right\} \tag{1}$$

舉個簡單例子說明，假設 P = 100，α = 0.6，I_0 = 100，I_T=150，G = 116，到期時可拿回 100(1+0.6*(1.5-1)) = 130，大於保證收益 116 元，因此到期投資人可拿回 130 元。

假設 P = 100，α = 0.6，I_0 = 100，I_T=95，G = 116，代入公式（1）可得 100(1+0.6*(0.95-1)) = 97，小於保證收益 116 元，因此到期時投資人可拿回 116 元，在此例中最低保證收益率讓投資人避免掉市場的下方風險。

2. 高水檔（High Water Mark）：High Water Mark 的型態則類似回顧型選擇權（Lookback Option），到期時的收益（payoff），挑選契約期限中最大的指數來計算報酬率。以下為現金流量：

$$Max\left\{P\left(1+\alpha\left(\frac{I^{Max}}{I_0}-1\right)\right),G\right\} \tag{2}$$

此處，$I^{\max}=Max(I_0,I_1,I_2,\cdots I_T)$。

High Water Mark 的現金流量與 PTP 十分類似，差異在於 PTP 只挑選到期日當天的連結標的來計算報酬，但 High Water Mark 則是挑選從起始日至到期日這段期間中，連結標的最大的績效來計算報酬率，對投資人來講，能獲取較高的利潤，但是相對的，其參與率則會較低。以下舉兩個例子說明。假設 P = 100，α = 0.6，I_0 = 100，I_1=150，I_2=90，I_3=200，G = 116，代入公式（2），100(1+0.6*(200/100 -1)) = 160，大於保證收益 116 元，到期可拿 160 元。接著，另一例子假設 P = 100，α = 0.6，I_0 = 100，I_1=80，I_2=105，I_3=90，G = 116，代入公式（2）得 100(1+0.6*(105/100 -1)) = 103，小於最低保證 116 元，因此到期投資人拿回 116 元。

3. 年度重設（Annul Ratchet）：Annual Ratchet 又分為複利年度重設（compound annual ratchet，CAR）和簡單年度重設（simple annual

ratchet，SAR）。Ratchet 的特色在於每期報酬會鎖定，這一期的報酬不影響下一期的報酬。Compound Annual Ratchet 在計算時，以複利方式計算，先算出當期的本利和後，再當成是下一期的本利。Simple Annual Ratchet 的計算方式為單利，將每期計算出來的指數價值加總。參與率（Participation rate）在 Annual Ratchet 中占有重要角色，當參與率越高，給付的年金則越多。上限率則是用來用來減少參與率的影響力，此外又可降低投資人的下方風險，當上限率增加時，契約價值與敏感度皆會上升，反之亦然（可參見 Buetow (1999)）。Compound Annual Ratchet 在到期日的現金流量為：

$$P \times \prod_{t=1}^{T} \left\{ 1 + Min\left(Max\left(\alpha \times \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 \right), F \right), C \right) \right\} \tag{3}$$

Simple Annual Ratchet 在到期日的現金流量為：

$$P \times \left\{ 1 + \sum_{t=1}^{T} Min\left(Max\left(\alpha \times \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 \right), F \right), C \right) \right\} \tag{4}$$

一般而言，通常假設 EIA 商品中的利率為固定值，連結的指數服從對數常態分配（lognormal distribution）。若要將利率改成浮動利率，可參考 Lin and Tan (2003)。以上這兩種商品的評價方式，Hardy (2004)已推演出來，Compound Annual Ratchet 有封閉解，可直接評價，而 Simple Annual Ratchet 的評價方式，Hardy (2004)使用了蒙地卡羅及三元樹的方法來計算。另外，Hsieh and Chiu (2007)推導出 Simple Annual Ratchet 的封閉解，並使用控制變數（control variates），讓蒙地卡羅模擬變得更有效率。

Ratchet 又可稱作 Cliquet，最早的 Cliquet Option 於 1996 年發行，連結的標的為 S&P500。以下為 Cliquet 現金流量的契約形式，與 Simple Annual Ratchet 類似：

$\overline{R} = Max\left(Min\left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1, C \right), F \right)$，為 Truncated return。

$$P \times Max\left(F_g, Min\left(\sum_{t=1}^{T} \overline{R}_t, C_g\right)\right) \quad (5)$$

區域（local）上限率和下限率主要是跟每一期的報酬率來比較，而全域（global）上限和下限率則是與全部加總後的報酬率來做比較。台新銀行在 2003 年發行的「台新七年期美元保本 NASDAQ100 指數連動式債券」，產品計息方式與公式(5)相似。目前已有不少關於 Cliquet 的研究，Windcliff, Forsyth and Vetzal (2006)比較了不同的數值方法來評價 Cliquet，像是內插法（interpolation）和網格技術（grid construction techniques），此外也對於波動度模型的假設做更詳細的比較。Den Iseger and Oldenkamp (2005)用 Laplace transform 評價了 BS model 下的 Cliquet、jump-diffusion 下的 Cliquet 和波動度為隨機項的 Cliquet，也計算了相關的避險參數，如 delta hedging、gamma hedging、rho hedging 和 vega hedging。

Mats (2006)提出了 Fourier integral 方法來評價選擇權，並比較了蒙地卡羅、準蒙地卡羅、有限差分法和 Fourier integral 四種評價方法，發現 Fourier integral 方法比準蒙地卡羅（quasi-Monte Carlo）和有限差分法還來的快且精準，此外，還可直接計算避險參數，避免了有限差分法和蒙地卡羅計算避險參數的缺點。

二、 多資產連結

多資產連結較常見的有以下幾種現金流量：

1. 極值現金流量（highest and lowest cash flow）

   極值現金流量公式如下：

$$Max\left[\alpha^1 \times \frac{I_t^1 - I_0^1}{I_0^1}, \cdots, \alpha^N \times \frac{I_t^N - I_0^N}{I_0^N}\right] \quad (6)$$

$$Min\left[\alpha^1 \times \frac{I_t^1 - I_0^1}{I_0^1}, \cdots, \alpha^N \times \frac{I_t^N - I_0^N}{I_0^N}\right] \quad (7)$$

從公式（6）可看出極值現金流量連結的標的至少有兩檔，計算的方式為選取績效最好的連結標的來計算。公式（7）則是選取績效最差的連結標的做計算，通常投資此種契約的投資人對市場極具信心，認為即使選取報酬率的最小值，仍然可獲利潤。2003 年寶來證券發行的寶來「智慧鎖利型」半年期股權連動式商品，到期本金的計算形式則與公式（7）類似，此商品連結 7 檔股票，由於不具保本性質，若連結標的的報酬率最小值為負數，投資人則面對本金無法 100%回收的風險，通常此類契約的參與率都較高，像寶來這類商品的參與率則高達 200%。

2. 投資組合現金流量（baskets cash flow）

投資組合現金流量顧名思義，現金流量是由一籃子的投資標的的表現所組成，其一般現金流量形式為：

$$\alpha^1 \times I_t^1 + \alpha^2 \times I_t^2 + \cdots + \alpha^N \times I_t^N \tag{8}$$

此外，投資組合的表現也可用每檔投資標的報酬率的加權平均來呈現：

$$P \times \alpha \times BR_{0,t}^d \tag{9}$$

$$BR_{0,t}^d = M^1 \times \frac{I_t^1 - I_0^1}{I_0^1} + M^2 \times \frac{I_t^2 - I_0^2}{I_0^2} + \cdots + M^N \times \frac{I_t^N - I_0^N}{I_0^N} \tag{10}$$

其中，M^i 代表各個投資標的的權重，$1 \le i \le N$ 。2004 年寶來證券發行的「大展鴻圖」保本型商品，連結 15 檔台灣的股票，計算報酬時，選取第 8 至第 13 名連結標的報酬率來計算，其結算報酬率算法為此六檔有效標的的平均報酬率，亦即公式（10）中的 M^i 皆為 $\frac{1}{6}$ 。

第二節 蒙地卡羅模擬法介紹

蒙地卡羅模擬法主要是根據大數法則和中央極限定理而來的。大數法則說明了當實驗越多次，其平均值會接近理論值，而中央極限定理則提供了在有限抽樣次數下，有關抽樣誤差的估計資訊。我們透過積分來解釋蒙地卡羅法，假設我們要計算 μ 的價值，現在透過一積分函式 f 來估計，可將此積分用下列式子來表示：

（參見 Glasserman (2004)）：

$$\mu = E[f(U)] = \int_0^1 f(x)dx$$

其中，U 為介於 0 和 1 的均勻分配。假設有一機制可抽出介於 0 和 1 之間的獨立均勻分配U_1、$U_2 \cdots U_n$，若要獲得μ的估計值（亦即$E[f(U)]$的價值），可透過$f(U)$中 n 個隨機抽樣的樣本值(U_i)得到，將這 n 個數值作平均，即為為μ的價值：

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i)$$

若 f 介於 0 和 1 之間是 integrable，透過大數法則，當$n \to \infty$，則$\hat{\mu}_n \to \mu$的機率為 1。若 f 為 square integrable，可得到變異數為：

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 (f(x) - \mu)^2 dx$$

誤差$\hat{\mu}_n - \mu$近似為常態分配，平均數為 0，標準差為$\sigma_f / \sqrt{n}$。但由於μ的實際值並不知道，因此σ_f可用樣本標準差來估計，樣本標準差為：

$$s_f = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(f(U_i) - \hat{\mu}_n)^2}$$

因此，從$f(U_1)$、$f(U_2)$、$f(U_3) \cdots f(U_n)$這些函數值中，不僅能計算出μ的估計值，還知道抽樣誤差。若要增加精確度，從$\sigma_f / \sqrt{n}$式子中可看出，如果要增加一位有效位數精確度，必須增加 100 倍的模擬次數，也就是說若原本模擬 1 萬次，為了增加一有效位數精確度，必須提高模擬次數到 100 萬次，因此，可透過變異數縮減技術來增快模擬效率。

Boyle (1977)將蒙地卡羅法運用在選擇權的評價上，其概念是基於無套利的假設，也就是選擇權的現值，可用期望值的折現來表示，而此期望值是處在機率平賭測度（equivalent martingale measure）或是風險中立測度（risk-neutral measure）下。

蒙地卡羅模擬法的步驟如下（參見 Boyle, Broadie and Glasserman (1997)）：

1. 模擬標的（eg.,標的價格及利率）在風險中立測度下的時間樣本路徑。
2. 將標的的每個樣本路徑值折現。
3. 把所有折現過後的樣本路徑值平均。

蒙地卡羅法具有優點和缺點，分別如下，（見陳威光 (2001)）

優點：

1. 簡單好用。
2. 具彈性，容易調整路徑相關選擇權的評價。
3. 可運用在多資產連結商品的評價。
4. 並不限定用於對數常態分配，可應用在其他分配模型上，像是跳躍（jump）模型。
5. 可檢測標準差，及其信賴區間。

缺點：

1. 不易處理美式選擇權，主要是因為美式選擇權須考慮提前履約，因此需在每一時間點比較選擇權價值。
2. 耗費時間。由於蒙地卡羅法收斂速度較緩慢，模擬次數須達到一萬次或更多次以上，才能使標準差縮小，較費時。
3. 只能求出起時點的 delta、gamma，較難求出中間各點的敏感度。

也因蒙地卡羅模擬耗時間，因此衍生出一些加快蒙地卡羅收斂的方法，亦即變異數縮減方法（variance reduction techniques）。接著，介紹變異數縮減方法。

變異數縮減是用來改善估計值的精準性，使其變得更有效率，因此變異數縮減的目標在於降低標準差。Hardy (2003)介紹了幾種常見的變異數縮減技巧：

1. 反向變異法（Antithetic Variates）
2. 控制變異法（Control Variate）

以下針對這二種方法做詳細的解析。

一、 反向變異法（Antithetic Variates）

反向變異法通常使用在隨機變數為對數常態分配或是均勻分配（uniform distribution），其概念為在隨機抽樣時，抽了一組標準常態亂數（Z_1、Z_2、Z_3、Z_4、Z_5...Z_n），同時也取它的相反符號，亦即一組負的標準常態亂數（$-Z_1$、$-Z_2$、$-Z_3$、$-Z_4$、$-Z_5$...$-Z_n$）和它成對稱。以 Hardy (2003)舉的例子為例，假設E_i為由標準常態變數 Z_i 所估計出來的第 i 情境的標的價格，$E_i^{'}$為由標準常態變數$-Z_i$所估計出來的第 i 情境的標的價格，Z_i與$-Z_i$具有相同的分配。兩者估計值的平均為E_{i}^{*}。

$$E_{\mathrm{i}}^{*}=\frac{E_i+E_i^{'}}{2}$$

若考慮了 N 種情境，則估計的平均值為：

$$\overline{E}_N^{*}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_i^{*}=\frac{\overline{E}_N+\overline{E}_N^{'}}{2N}$$

則$\overline{E}_N^{*}$的變異數比直接產生 2N 組E_i情境的變異數還來的小，茲證明如下：

$$Var\left(E_i^{*}\right)=Var\left(\frac{E_i+E_i^{'}}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(Var\left(E_i\right)+Var\left(E_i^{'}\right)+2Cov\left(E_i,E_i^{'}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(Var\left(E_i\right)+Cov\left(E_i,E_i^{'}\right)\right)$$

由於 Z_i 與$-Z_i$ 呈現負相關，使得其變異數為負數，又E_i與$E_i^{'}$擁有相同的變異數，因此使得$\overline{E}_N^{*}$會變得較小。舉例說明，假設E_i與$E_i^{'}$的標準差為 0.3，相關係數為-0.8，則$Var\left(E_i^{*}\right)=\frac{1}{2}\left(0.3^2-0.8\times 0.3\times 0.3\right)=0.009$，則$E_{\mathrm{i}}^{*}$的標準差為$\sqrt{0.009}=0.095$，新的模擬值的標準差比原本的標準差小，小了 3 倍左右。若抽樣的變數 U_i 為均勻分配（Uniform（0,1）），則其反向變異數為 $1-U_i$。

二、 控制變異法（Control Variates）

相較於反向變異法，控制變數法主要用在 Guaranteed Minimum Maturity Benefit（GMMB）和 Guaranteed Minimum Death Benefit（GMAB）類型的選擇權上。控制變數的主要特色為：

1. 控制變數具有公式解（封閉解）

2. 控制變數與標的商品具有高度相關性

控制變異法的基本演算法步驟如下：

1. 選擇控制變數，並計算其封閉解 E_{CV}

2. 產生模擬情境，模擬控制變數的估計值 $\hat{E}_{CV}$ 和標的商品的估計值 $\hat{E}$

3. 假設 E 為標的商品價值，則經過控制變數調整過後模擬的商品價值為：

$$E^* = \hat{E} + \left(E_{CV} - \hat{E}_{CV}\right)$$

由於 $\hat{E}$ 與 E 為高度相關，在模擬時若 $\hat{E}$ 很大，則 $\hat{E}_{CV}$ 也會很大，兩者相減後可減少誤差，因此，當控制變數與原本標的商品的相關性越大，收斂的效果則越好。以下說明控制變數與原本標的商品的相關係數大於某數值，則透過控制變異法所模擬出來的變異數相較於原變異數，會下降許多（參見陳威光 (2001)的著作）。假設 σ_1^2 代表標的商品 $\hat{E}$ 的變異數，σ_2^2 代表控制變數 $\hat{E}_{CV}$ 的變異數。由於 $E^* = \hat{E} + \left(E_{CV} - \hat{E}_{CV}\right)$，則 E^* 的變異數為 $Var\left(E^*\right) = Var\left(\hat{E} + E_{CV} - \hat{E}_{CV}\right)$，又 E_{CV} 為常數，變異數等於 0，因此 E^* 的變異數等於：

$$Var\left(E^*\right) = Var\left(\hat{E} + E_{CV} - \hat{E}_{CV}\right) = Var\left(\hat{E} - \hat{E}_{CV}\right) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$$

此處，ρ 為控制變數 $\hat{E}_{CV}$ 與原商品 $\hat{E}$ 的相關係數。當 $\rho > \dfrac{\sigma_2}{2\sigma_1}$ 時，$Var\left(E^*\right) < \sigma_1^2$，亦即透過控制變異法調整過後模擬的商品變異數會小於原商品的變異數。譬如，若 $\sigma_1 = 0.3$ ，$\sigma_2 = 0.5$ ，$\rho = 0.9$ 時，

$Var\left(E^*\right) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 = 0.3^2 + 0.5^2 - 2\times 0.9\times 0.3\times 0.5 = 0.07$，而未透過控制變異法的原商品變異數為 0.09（0.3×0.3=0.09），由此可證使用了控制變數後，變異數比較小。

接下來為推導控制變異法的方法。假設原商品變數為 X ，n 個控制變數 C_1 、C_2 …、C_n，我們透過控制變數所產生的新變數為 $X(\lambda) = X - \lambda_1 C_1 \cdots - \lambda_n C_n$，且令

$E(X(\lambda)) = E(X)$，$Var(X(\lambda)) \leq Var(X)$。我們目標為極小化$Var(X(\lambda))$，因此需要找到最適權數$\lambda_1^* \cdots \lambda_n^*$來極小化$Var(X(\lambda))$。茲證明如下：

$$Var(X(\lambda)) = Var(X - \lambda_1 C_1 - \lambda_1 C_2 - \cdots - \lambda_n C_n)$$

$$= Var\left(X - \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \right)$$

令 $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$，$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$

$$\therefore Var(X(\lambda)) = Var(X - C^T \lambda)$$

Objective： $\min Var(X - C^T \lambda)$

$$\min\ Var(X - C^T \lambda) = \min Var(X) - 2\lambda^T \operatorname{cov}(X, C^T) + \lambda Var(C^T)\lambda$$

$$\text{F.O.C}: \frac{\partial Var(X(\boldsymbol{\lambda}))}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0$$

$\therefore\ -2\operatorname{cov}(X, C^T) + 2\lambda Var(C^T) = 0$，經過移項運算後可得，

$$\lambda = Var(C^T)^{-1} \operatorname{cov}(X, C^T) = \frac{\operatorname{cov}(X, C^T)}{Var(C^T)} = \frac{E(XC^T) - E(X) \times E(C^T)}{Var(C^T)} \tag{11}$$

又因 $E(X(\lambda)) = E(X)$，所以 $E(C^T) = 0$，公式（11）可以改成$\boldsymbol{\lambda} = \dfrac{E(XC^T)}{Var(C^T)}$

$$\text{S.O.C}: \frac{\partial^2 Var(X(\lambda))}{\partial \lambda^2} = 2Var(C^T) > 0$$