第三章 研究方法與模型設定

第一節 單資產 Quanto 模型

假設有一完全市場（complete market），存在一檔以 A 幣計價的標的（underlying），一個對 A 幣的匯率，一外國無風險利率，和一本國無風險利率。I_t 代表在時間點 t 時的連結標的價值，$t \geq 0$。C_t 代表在時間點 t 時的匯率（本國幣 / A 幣），$t \geq 0$。B_t 代表在時間點 t 時的外國無風險公債（cash bond）價值，$t \geq 0$。D_t 代表在時間點 t 時本國的無風險公債（cash bond）價值。此外，我們假設連結標的價值以及匯率皆服從幾何布朗運動。連結標的價值和匯率的共變異矩陣為Σ。我們定義測度 P（measure P）為現實環境下的測度，在 P 測度下，外國標的和匯率的隨機微分方程（stochastic differential equation，SDE）分別為：

$$\frac{dI_t}{I_t} = \mu_I dt + \sigma_I dW_I(t) \tag{12}$$

$$\frac{dC_t}{C_t} = \mu_c dt + \sigma_c dW_c(t) \tag{13}$$

$$corr(W_I(t), W_c(t)) = \rho_{I,c} \tag{14}$$

在此處，$W_I(t)$ 和 $W_c(t)$ 為標準布朗運動（standard Brownian motion），但彼此之間具有相關性 $\rho_{I,c}$，σ_I 和 σ_c 分別為連結標的 i 和匯率的波動度，為固定值（constant）。

此外，假設外國公債及本國公債的利率皆為固定（constant），外國公債和本國公債的 SDE 分別為：

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt \tag{15}$$

$$\frac{dD_t}{D_t} = r_f dt \tag{16}$$

我們定義 Q 為無風險機率測度，又稱作等價平賭機率測度（Equivalent Martingale Measure）。根據 Girsonov Theorem（參見 Baxter and Rennie

(1996))，可以將 P 測度轉換到 Q 測度，在 Q 測度下，波動項（diffusion term）和 P 測度下的波動項相同，差異只在於漂移項（drift term）。由於是一完全市場，利率假設為固定數，透過風險中立評價準則（risk-neutral valuation principle）可得知，商品的評價則可用期望值來表示，並且用無風險利率來折現（可參考 Hull (2006)的第 25 章，關於 Martingales 和測度的介紹）。用符號來表示為：

$$V_0 = e^{-rT} E[Y] \tag{17}$$

此處，Y 代表商品的到期收益公式（payoff），V_0 則是在時間點 0 商品的價值。

經過一些運算後，我們可找出一獨特的 Q 測度，外國標的在 Q 測度下的 SDE 和匯率的 SDE 分別為：

$$\frac{dI_t}{I_t} = \left(r_f - \delta_I - \frac{1}{2}\sigma_I^2 - \rho_{I,c}\sigma_I\sigma_c \right) dt + \sigma_I \widetilde{W}_I(t) \tag{18}$$

$$\frac{dC_t}{C_t} = \left(r - r_f - \frac{1}{2}\sigma_c^2 \right) dt + \sigma_c \widetilde{W}_c(t) \tag{19}$$

$$corr\left(\widetilde{W}_I(t), \widetilde{W}_c(t)\right) = \rho_{I,c} \tag{20}$$

此處，δ_I 代表外國連結標的所發放的年股利，是一固定的數值，σ_c 代表匯率在 P 測度下的波動度，σ_I 是連結標的在 P 測度下的波動度，$\rho_{i,c}$ 為匯率和連結標的的相關係數，$\widetilde{W}_I(t)$ 和 $\widetilde{W}_c(t)$ 為在 Q 測度下的標準布朗運動。則 I_t^i 和 C_t 為：

$$I_t = I_0 \times \exp\left(\left(r_f - \delta_I - \frac{1}{2}\sigma_I^2 - \rho_{I,c}\sigma_I\sigma_c \right) \times t + \sigma_I \widetilde{W}_I(t) \right) \tag{21}$$

$$C_t = C_0 \times \exp\left(\left(r - r_f - \frac{1}{2}\sigma_c^2 \right) \times t + \sigma_c \widetilde{W}_c(t) \right) \tag{22}$$

$$corr\left(\widetilde{W}_I(t), \widetilde{W}_c(t)\right) = \rho_{I,c} \tag{23}$$

接著，根據公式（21），可推導出 Quanto Simple Annual Ratchet EIA 的分析解（analytical answer）。藉由 Hsieh and Chiu (2007)推導 Simple Annual Ratchet EIA 的方法，本研究推導 Quanto Simple Annual Ratchet EIA 的過程如下：

到期時 Quanto Simple Annual Ratchet EIA 的現金流量為：

$$P\left\{1+\sum_{t=1}^{T} Min\left(Max\left(\alpha\times\left(\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)-1\right),F\right),C\right)\right\}$$

又，$\ln\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)=\left(r_f-\delta_I-\frac{1}{2}\sigma_I^2-\rho_{I,c}\sigma_I\sigma_c\right)+\sigma_I Z$ ，$Z\sim N(0,1)$

所以，$\frac{I_t}{I_{t-1}}=\exp\left(r_f-\delta_I-\frac{1}{2}\sigma_I^2-\rho_{I,c}\sigma_I\sigma_c+\sigma_I Z\right)$

令 $\widetilde{R}_t=1+Min\left(Max\left(\alpha\times\left(\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)-1\right),F\right),C\right)$

$$=(1-\alpha)+\alpha\times Min\left(Max\left(f_\alpha,\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right),c_\alpha\right)$$

$$V_{Qsr}=\exp(-r\times T)\times \mathrm{E}\left(1+\sum_{t=1}^{T}\left(\widetilde{R}_t-1\right)\right)=\exp(-r\times T)\times \mathrm{E}\left(1-T+\sum_{t=1}^{T}\widetilde{R}_t\right)$$

$$=\exp(-r\times T)\times\left((1-\alpha T)+\alpha TEX_1\right)$$

此處，V_{Qsr} 代表 Quanto Simple Annual Ratchet EIA 於到期日的價格，α 為參與率，$f_\alpha=1+\frac{F}{\alpha}$ ，$c_\alpha=1+\frac{C}{\alpha}$ ，F 為下限率，C 為上限率，

$EX_1=f_\alpha \Pr(R_1\le f_\alpha)+E[R_1;f_\alpha\le R_1\le c_\alpha]+c_\alpha\Pr(R_1\ge c_\alpha)$ 。

而 $R_1=\exp\left(r_f-\delta_I-\frac{1}{2}\sigma_I^2-\rho_{I,c}\sigma_I\sigma_c+\sigma_I Z\right)$ ，$Z\sim N(0,1)$ 。

因此，Quanto Simple Ratchet EIA 的價格為：

$$V_{Qsr}=e^{-rT}\left\{1-\alpha T+\alpha T\left(f_\alpha N(d_1)+c_\alpha N(-d_2)+\exp\left(r_f-d-\rho_{I,c}\sigma_I\sigma_c\right)\left[N(d_2-\sigma_I)-N(d_1-\sigma_I)\right]\right)\right\} \tag{24}$$

$$d_1=\frac{\ln f_\alpha-r_f+\delta_I+\frac{1}{2}\sigma_I^2+\rho_{I,c}\sigma_I\sigma_c}{\sigma_I}$$

$$d_2=\frac{\ln c_\alpha-r_f+\delta_I+\frac{1}{2}\sigma_I^2+\rho_{I,c}\sigma_I\sigma_c}{\sigma_I}$$

$N(\cdot)$代表累積分配函數（Cumulative Distribution Function，CDF）。

接下來，使用蒙地卡羅法來模擬 Quanto Simple Annual Ratchet EIA 的價值。根據公式（21）可知 Q 測度下連結標的和匯率的動態過程，透過尤拉定理（Euler Scheme）進行離散化（Discretization），如公式（25）、公式（26）所示：

$$I(t+\Delta t)=I(t)\times\exp\left(\left(r_f-\delta_I-\frac{1}{2}\sigma_I^2-\rho_{I,c}\sigma_I\sigma_c\right)\times\Delta t+\sigma_I\Delta\widetilde{W}_I(t)\right) \tag{25}$$

$$C(t+\Delta t)=C(t)\times\exp\left(\left(r-r_f-\frac{1}{2}\sigma_c^2\right)\times\Delta t+\sigma_c\Delta\widetilde{W}_c(t)\right) \tag{26}$$

$$corr\left(\widetilde{W}_I(t),\widetilde{W}_c(t)\right)=\rho_{I,c} \tag{27}$$

$$\forall t=0,1,\ldots T$$

由於使用蒙地卡羅法模擬時，無法產生具有相關性的布朗運動項，因此需要透過 choleskey decomposition 來得到我們所需的有相關性的隨機變數。Baxter and Rennie (1996)以一檔標的和一匯率為例，共變異數為：

$$\operatorname{cov}\left(\frac{dC_{\mathrm{t}}}{C_{\mathrm{t}}},\frac{dI_{\mathrm{t}}}{I_{\mathrm{t}}}\right)=\operatorname{cov}\left(d\ln C_{\mathrm{t}},d\ln I_{\mathrm{t}}\right)=\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{\mathrm{c}}^2 & \rho_{\mathrm{I,c}}\sigma_{\mathrm{c}}\sigma_{\mathrm{I}}\\ \rho_{\mathrm{I,c}}\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{c}} & \sigma_{\mathrm{I}}^2\end{bmatrix}t \tag{28}$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{\mathrm{c}}^2 & \rho_{\mathrm{I,c}}\sigma_{\mathrm{c}}\sigma_{\mathrm{I}}\\ \rho_{\mathrm{I,c}}\sigma_{\mathrm{c}}\sigma_{\mathrm{I}} & \sigma_{\mathrm{I}}^2\end{bmatrix}t=\begin{bmatrix}\sigma_{\mathrm{c}} & 0\\ \rho_{I,c}\sigma_{\mathrm{I}} & \sqrt{1-\rho_{I,c}^2}\,\sigma_{\mathrm{I}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t & 0\\ 0 & t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{\mathrm{c}} & 0\\ \rho_{I,c}\sigma_I & \sqrt{1-\rho_{I,c}^2}\,\sigma_{\mathrm{I}}\end{bmatrix}^T$$

所以，$\Sigma=A\cdot A^T$，A 為 time average variance constant。

則連結標的和匯率的動態方程式為：

$$I(t+\Delta t)=I(t)\times\exp\left(\left(r_f-\delta_I-\frac{1}{2}\sigma_I^2-\rho_{I,c}\sigma_I\sigma_c\right)\times\Delta t+\sum_{j=1}^{2}A_{2,j}\Delta\widetilde{W}_I^Q(t)\right) \tag{29}$$

$$C(t+\Delta t)=C(t)\times\exp\left(\left(r-r_f-\frac{1}{2}\sigma_c^2\right)\times\Delta t+\sum_{i=1}^{1}A_{1,i}\Delta\widetilde{W}_c^Q(t)\right) \tag{30}$$

在此，$\widetilde{W}_I^Q$ 和 $\widetilde{W}_c^Q$ 為 Q 測度下獨立的標準布朗運動，$\Delta\widetilde{W}_I^Q$ 和 $\Delta\widetilde{W}_c^Q$ 皆服從 $N(0,1)$ 且為 iid，$\sum_{j=1}^{i}A_{i,j}\cdot\widetilde{W}_j(t)$ 為波動項（volatility term），$\sigma_I=\sqrt{\sum_{j=1}^{i}A_{i,j}^2}$，也就是連結標的

在 P 測度下的波動度，$\rho_{I,c} = corr\left(\frac{dI_t}{I_t}, \frac{dC_t}{C_t}\right)$。透過公式（29），即可使用蒙地卡羅法來模擬連接標的價值，並將模擬數值代入公式（4）中，就可算出 Quanto Simple Annual Ratchet EIA 的價值。

第二節 多資產 Quanto 模型

假設有一完全市場（complete market），存在 N 檔以 A 幣計價的標的（underlying），一個對 A 幣的匯率，一外國無風險利率，和一本國無風險利率。I_t^i 代表在時間點 t 時的連結標的價值，$t \geq 0$。C_t 代表在時間點 t 時的匯率（本國幣 / A 幣），$t \geq 0$。B_t 代表在時間點 t 時的外國無風險公債（cash bond）價值，$t \geq 0$。D_t 代表在時間點 t 時本國的無風險公債（cash bond）價值。此外，我們假設連結標的價值以及匯率皆服從幾何布朗運動。連結標的價值和匯率的共變異矩陣為 Σ。我們定義測度 P（measure P）為現實環境下的測度，在 P 測度下，外國標的和匯率的隨機微分方程（stochastic differential equation，SDE）分別為：

$$\frac{dI_t^i}{I_t^i} = \mu_{I,i} dt + \sigma_i dW_i(t)\text{，}1 \leq i \leq N \tag{31}$$

$$\frac{dC_t}{C_t} = \mu_c dt + \sigma_c dW_c(t) \tag{32}$$

$$corr(W_i(t), W_c(t)) = \rho_{i,c} \tag{33}$$

在此處，$W_i(t)$ 和 $W_c(t)$ 為標準布朗運動（standard Brownian motion），但彼此之間具有相關性 $\rho_{i,c}$，σ_i 和 σ_c 分別為連結標的 i 和匯率的波動度，為固定值（constant）。

此外，假設外國公債及本國公債的利率皆為固定（constant），外國公債和本國公債的 SDE 分別為：

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt \tag{34}$$

$$\frac{dD_t}{D_t} = r_f dt \tag{35}$$

我們定義 Q 為無風險機率測度，根據 Girsonov Theorem，將 P 測度轉換到 Q 測度。在 Q 測度下，如同單資產 Quanto 模型，波動項（diffusion term）和 P 測度下的波動項相同，差異只在於漂移項（drift term）。

經過一些運算後，我們可找出一獨特的 Q 測度，根據 Jean-Yves, Genevieve and Jean-Guy (2003) 的推導結果，我們可知外國標的在 Q 測度下的 SDE 和匯率的 SDE 分別為：

$$\frac{dI_t^i}{I_t^i} = \left(r_f - \delta_I^i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 - \rho_{i,c}\sigma_i\sigma_c\right)dt + \sigma_i \widetilde{W}_i(t) \text{，} 1 \le i \le N \tag{36}$$

$$\frac{dC_t}{C_t} = \left(r - r_f - \frac{1}{2}\sigma_c^2\right)dt + \sigma_c \widetilde{W}_c(t) \tag{37}$$

$$corr\left(\widetilde{W}_i(t), \widetilde{W}_c(t)\right) = \rho_{i,c} \tag{38}$$

此處，δ_I^i 代表外國連結標的所發放的年股利，是一固定的數值，σ_c 代表匯率在 P 測度下的波動度，σ_i 是連結標的 I_t^i 在 P 測度下的波動度，$\rho_{i,c}$ 為連結標的 I_t^i 和匯率的相關係數，$\widetilde{W}_i(t)$ 和 $\widetilde{W}_c(t)$ 為在 Q 測度下的標準布朗運動。則 I_t^i 和 C_t 為：

$$I_t^i = I_0^i \times \exp\left(\left(r_f - \delta_I^i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 - \rho_{i,c}\sigma_i\sigma_c\right) \times t + \sigma_i \widetilde{W}_i(t)\right) \text{，} 1 \le i \le N \tag{39}$$

$$C_t = C_0 \times \exp\left(\left(r - r_f - \frac{1}{2}\sigma_c^2\right) \times t + \sigma_c \widetilde{W}_c(t)\right) \tag{40}$$

$$corr\left(\widetilde{W}_I(t), \widetilde{W}_c(t)\right) = \rho_{I,c} \tag{41}$$

接下來，使用蒙地卡羅法來模擬公式（38）的價值。透過尤拉定理（Euler Scheme）進行離散化（Discretization），如公式（42）、公式（43）所示：

$$I^i(t+\Delta t) = I^i(t) \times \exp\left(\left(r_f - \delta_I^i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 - \rho_{i,c}\sigma_i\sigma_c\right) \times \Delta t + \sigma_i \Delta\widetilde{W}_i(t)\right) \tag{42}$$

$$C(t+\Delta t) = C(t) \times \exp\left(\left(r - r_f - \frac{1}{2}\sigma_c^2\right) \times \Delta t + \sigma_c \Delta\widetilde{W}_c(t)\right) \tag{43}$$

$$corr\left(\widetilde{W}_i(t), \widetilde{W}_c(t)\right) = \rho_{i,c} \tag{44}$$

$$\forall t = 0,1,...T \text{ ，} 1 \le i \le N$$

由於使用蒙地卡羅法模擬時，無法產生具有相關性的布朗運動項，因此需要透過 choleskey decomposition 來得到我們所需的有相關性的隨機變數。令共變異數為Σ，

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N,1} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \text{，} \sigma_{i,j} = \rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j \text{ ，} 1 \le i \le N \text{ ，} 1 \le j \le N$$

所以，經過 choleskey 分解後可得出$\Sigma = A \cdot A^T$，A 為 time average variance constant。則連結標的和匯率的動態方程式為：

$$I^i(t+\Delta t) = I^i(t) \times \exp\left(\left(r_f - \delta_I^i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 - \rho_{i,c}\sigma_i\sigma_c\right) \times \Delta t + \sum_{j=1}^{i} A_{i,j}\Delta\widetilde{W}_j^Q(t)\right) \tag{45}$$

$$C(t+\Delta t) = C(t) \times \exp\left(\left(r - r_f - \frac{1}{2}\sigma_c^2\right) \times \Delta t + \sum_{i=1}^{1} A_{1i}\Delta\widetilde{W}_c^Q(t)\right) \tag{46}$$

$$1 \le i \le N$$

在此，$\widetilde{W}_j^Q$和$\widetilde{W}_c^Q$為 Q 測度下獨立的標準布朗運動，$\Delta\widetilde{W}_j^Q$和$\Delta\widetilde{W}_c^Q$皆服從$N(0,1)$且為 iid ，$\sum_{j=1}^{i} A_{i,j} \cdot \widetilde{W}_j(t)$為波動項（volatility term），$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{i} A_{i,j}^2}$，也就是連結標的在 P 測度下的波動度，$\rho_{i,c} = corr\left(\frac{dI_t^i}{I_t^i}, \frac{dC_t}{C_t}\right)$。透過公式（45），即可使用蒙地卡羅法來模擬連接標的價值。