

第四章 數值例子

第一節 單資產 Quanto EIA

本文用公式(24)來計算 Quanto Simple Annual Ratchet EIA 的價格。首先，先解釋契約內容，我們假設契約 7 年到期 ($T = 7$)，期初投資本金為 100 元 ($P = 100$)，連結標的年波動度為 25% ($\sigma_I = 25\%$)，匯率波動度為 15% ($\sigma_c = 15\%$)，本國年利率為 6% ($r = 6\%$)，外國年利率為 3% ($r_f = 3\%$)，股利率為 2% ($\delta_I = 2\%$)，下限率為 0% ($F = 0$)，連結標的和匯率的相關係數 ($\rho_{I,c}$) 用 0.5 代入計算，上限率 (Cap rate, c) 為 10%、15%、20%、30%、40%，參與率 (α) 為 0.6、0.8、1.0、1.2。當 $\rho_{I,c} = 0.5$ ，我們將 Quanto Simple Annual Ratchet EIA 的分析解列於表 2。

表 2、Quanto Simple Annual Ratchet EIA 的分析解， $\rho_{I,c} = 0.5$

Participation α	Cap rate c (per year)				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	80.40	84.56	87.29	90.15	91.25
0.8	81.61	86.90	90.84	95.79	98.30
1.0	82.38	88.46	93.31	100.09	104.13
1.2	82.91	89.57	95.10	103.41	108.88

接下來，我們也透過蒙地卡羅的方式來模擬 Quanto Simple Annual Ratchet EIA 的價格，總共模擬 10000 次。

公式 (4) 中關於報酬率的部份，由第三章模型設定可得知 $\ln\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)$ 是獨立的常態變數 (normal variable)，平均數為 $r_f - \delta_I - \frac{1}{2}\sigma_I^2 - \rho_{I,c}\sigma_I\sigma_c$ ，標準差為 σ_I ，

因此在模擬時，即可得到 10000 個獨立的 $\ln\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)$ ，將其帶入公式 (4) 可算出

Quanto Simple Annual Ratchet EIA 的價格。表 3 為 $\rho_{I,c} = 0.5$ 所算出來的價格和標準誤。

表 3、Quanto Simple Annual Ratchet EIA 估計價格和標準誤， $\rho_{I,c} = 0.5$

估計的價格					
α / c	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	80.37	84.49	87.19	90.03	91.11
0.8	81.56	86.85	90.75	95.65	98.14
1.0	82.33	88.40	93.24	99.94	103.95
1.2	82.85	89.49	95.03	103.27	108.68
標準誤					
α / c	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	0.1130	0.1547	0.1866	0.2272	0.2471
0.8	0.1175	0.1659	0.2063	0.2659	0.3029
1.0	0.1203	0.1722	0.2182	0.2913	0.3437
1.2	0.1221	0.1763	0.2260	0.3094	0.3732

從表 2 及表 3 的數字可發現，蒙地卡羅所模擬出來的數值與分析解十分相近，但仍有些許誤差。此處，標準誤 (standard error) 算法為 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ， σ 為標準差， n 為模擬的次數，若希望標準誤越小，在無法改變標準差的情況下，只能提高模擬的次數，且是以倍數增加，如此一來，模擬時間會變得非常緩慢，因此本研究透過變異數縮減，不但可以降低模擬次數，亦能精確的模擬出與分析解非常接近的數值。

接下來，我們調整 $\rho_{I,c}$ ，看相關係數對商品價格的影響力。首先，設定 $\rho_{I,c} = 0.1$ 、0.2、0.3、0.4，代入 Quanto Simple Ratchet EIA 的封閉解，分別求出不同參與率和上限率的商品成本。表 4 為 $\rho_{I,c} = 0.1$ 所算出來的價格和標準誤。

表 4、Quanto Simple Annual Ratchet EIA 價格和標準誤， $\rho_{I,c} = 0.1$

估計的價格					
α / c	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	81.48	86.06	89.14	92.41	93.71
0.8	82.72	88.49	92.85	98.43	101.32
1.0	83.50	90.09	95.40	102.96	107.54
1.2	84.03	91.22	97.25	106.42	112.58
標準誤					
α / c	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	0.1132	0.1554	0.1886	0.2318	0.2546
0.8	0.1181	0.1662	0.2072	0.2693	0.3090
1.0	0.1209	0.1728	0.2187	0.2939	0.3484
1.2	0.1227	0.1772	0.2265	0.3108	0.3772

表 5 為 $\rho_{s,c} = 0.2$ 所算出來的價格和標準誤。

表 5、Quanto Simple Annual Ratchet EIA 價格和標準誤， $\rho_{I,c} = 0.2$

估計的價格					
α / c	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	81.12	85.60	88.59	91.75	92.99
0.8	82.34	87.97	92.23	97.65	100.44
1.0	83.12	89.54	94.72	102.10	106.54
1.2	83.66	90.65	96.53	105.49	111.48
標準誤					
α / c	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	0.1136	0.1562	0.1892	0.2318	0.2534
0.8	0.1185	0.1668	0.2083	0.2698	0.3090
1.0	0.1215	0.1733	0.2196	0.2952	0.3490
1.2	0.1236	0.1778	0.2272	0.3124	0.3784

表 6 為 $\rho_{s,c} = 0.3$ 所算出來的價格和標準誤。

表 6、Quanto Simple Annual Ratchet EIA 價格和標準誤， $\rho_{I,c} = 0.3$

估計的價格					
α / c	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	80.91	85.28	88.22	91.33	92.53
0.8	82.13	87.64	91.80	97.15	99.87
1.0	82.91	89.23	94.29	101.51	105.90
1.2	83.44	90.35	96.11	104.85	110.74
標準誤					
α / c	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	0.1133	0.1552	0.1882	0.2303	0.2512
0.8	0.1181	0.1662	0.2070	0.2687	0.3071
1.0	0.1210	0.1729	0.2186	0.2935	0.3475
1.2	0.1227	0.1772	0.2266	0.3105	0.3765

表 7 為 $\rho_{I,c} = 0.4$ 所算出來的價格和標準誤。

表 7、Quanto Simple Annual Ratchet EIA 價格和標準誤， $\rho_{I,c} = 0.4$

估計的價格					
α / c	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	80.64	84.89	87.72	90.66	91.79
0.8	81.86	87.24	91.29	96.40	98.98
1.0	82.63	88.82	93.76	100.75	104.91
1.2	83.16	89.93	95.57	104.08	109.73
標準誤					
α / c	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	0.1141	0.1561	0.1887	0.2306	0.2515
0.8	0.1192	0.1673	0.2081	0.2692	0.3075
1.0	0.1220	0.1742	0.2200	0.2946	0.3480
1.2	0.1239	0.1788	0.2282	0.3122	0.3775

從表 4 到表 7 可發現，當參與率越高，代表投資人所享受到的收益倍數越大，相對也代表 Quanto Simple Annual Ratchet 的成本越高。同樣地，當上限率越

高，Quanto Simple Annual Ratchet 的成本也越高，以表 3 為例，我們固定參與率，看上限率對商品的成本如何變化，將成本變化列於表 8。另外我們也固定上限率，看參與率的變化對成本的影響，將成本變化列於表 9。

表 8、固定參與率後，上限率的變化對於商品成本的影響

Participation α	Cap rate c 的變化 (per year)			
	10% -> 15%	10% -> 20%	10% -> 30%	10% -> 40%
0.6	5.13%	8.07%	11.08%	11.93%
0.8	6.48%	10.58%	15.53%	17.32%
1.0	7.38%	12.34%	18.89%	21.64%
1.2	8.02%	13.61%	21.49%	25.01%

表 9、固定上限率後，參與率的變化對於商品成本的影響

Participation α 的變化	Cap rate c (per year)				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6 -> 0.8	1.49%	2.79%	4.08%	6.25%	7.71%
0.6 -> 1.0	2.43%	4.63%	6.93%	11.01%	14.09%
0.6 -> 1.2	3.09%	5.92%	8.99%	14.71%	19.28%

從表 8 和表 9 可看出，假設上限率和參與率對投資人的效用是相同的，當上限率增強為兩倍時，商品成本的增加幅度大於參與率增強為兩倍的幅度。因此，若發行商想增加參與率或是上限率來吸引投資人投資時，可提高參與率的水準，不僅可以吸引投資人，也可避免商品成本過高。

從相關係數這個維度來看，連結標的與匯率的相關係數越高，商品成本越低。因此，若相關係數較高，調整參與率和上限率時，對成本的影響力就相對著變小了。表 10 為將 $\rho_{I,c} = 0.4$ 改成 0.5 後，商品的成本變化。表 11 為將 $\rho_{I,c} = 0.3$ 改成 0.5 後，商品的成本變化。

表 10、將 $\rho_{l,c} = 0.4$ 改成 0.5 後，商品的成本變化

Participation α	Cap rate c (per year)				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	-0.33%	-0.47%	-0.60%	-0.70%	-0.74%
0.8	-0.36%	-0.45%	-0.59%	-0.77%	-0.85%
1.0	-0.37%	-0.47%	-0.56%	-0.80%	-0.92%
1.2	-0.37%	-0.49%	-0.56%	-0.77%	-0.96%

表 11、將 $\rho_{l,c} = 0.3$ 改成 0.5 後，商品的成本變化

Participation α	Cap rate c (per year)				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	-0.66%	-0.92%	-1.17%	-1.43%	-1.53%
0.8	-0.69%	-0.90%	-1.14%	-1.54%	-1.74%
1.0	-0.70%	-0.92%	-1.12%	-1.55%	-1.84%
1.2	-0.70%	-0.94%	-1.12%	-1.50%	-1.86%

站在發行商的角度，以表 3 為例，發行商向投資人收取 100 元契約本金，上限率 10%，參與率 60%，產品總價值為 80.37 元，發行商賺的利潤為 19.63%。若發行商要預計要賺取利潤 17% 左右，以表 7 的數據來講，當上限率 10%，參與率 100% 和 120%，其產品成本分別為 82.63 元和 83.16 元，發行商賺取的利潤為 17.37% 和 16.84%，但是對投資人而言，上限率 10%，參與率 120% 的吸引力大於上限率 10%，參與率 100%，因此發行商可以透過調整上限率及參與率設計出對公司利潤最合適，且對符合投資人預期的契約。

第二節 多資產 Quanto EIA

本研究以 A 保險公司發行的 B 商品為例：契約年限為 6 年到期 ($T = 6$)，每年評價一次 ($t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)，期初投資本金為 100 元 ($P = 100$)，

計價幣別為澳幣。連結標的共六檔以美元為計價單位的股票，分別為 I_t^1 、 I_t^2 、 I_t^3 、 I_t^4 、 I_t^5 、 I_t^6 。參與率為 80% ($\alpha = 80\%$)，最低保證率（亦即全域下限率）為 20% ($F_g = 20\%$)，各期的下限率為 0% ($F = 0\%$)，澳幣利率 (r_f) 為 4.7%，美國利率 (r) 為 5.961%。共變異數矩陣 (Covariance Matrix) 為：

	匯率	I^1	I^2	I^3	I^4	I^5	I^6
匯率	0.0105	0.0013	0.0032	0.0040	0.0042	0.0054	0.0080
I^1	0.0013	0.0481	0.0004	0.0020	0.0019	0.0062	0.0042
I^2	0.0032	0.0004	0.0509	0.0075	0.0135	0.0147	0.0107
I^3	0.0040	0.0020	0.0075	0.0387	0.0126	0.0162	0.0172
I^4	0.0042	0.0019	0.0135	0.0126	0.0405	0.0234	0.0193
I^5	0.0054	0.0062	0.0147	0.0162	0.0234	0.1716	0.0316
I^6	0.0080	0.0042	0.0107	0.0172	0.0193	0.0316	0.0711

對角線為匯率和各連結標的的變異數。相關係數矩陣如下：

	匯率	I^1	I^2	I^3	I^4	I^5	I^6
匯率	1	0.0562	0.1394	0.1975	0.2027	0.1262	0.2940
I^1	0.0562	1	0.0086	0.0456	0.0432	0.0688	0.0715
I^2	0.1394	0.0086	1	0.1685	0.2967	0.1569	0.1774
I^3	0.1975	0.0456	0.1685	1	0.3186	0.1991	0.3272
I^4	0.2027	0.0432	0.2967	0.3186	1	0.2808	0.3595
I^5	0.1262	0.0688	0.1569	0.1991	0.2808	1	0.2862
I^6	0.2940	0.0715	0.1774	0.3272	0.3595	0.2862	1

匯率和各連結標的為正相關，連結標的間也為正相關。

商品到期時 payoff 如下：

$$P \times \left[100\% + \text{Max} \left(F_g, \alpha \times \frac{1}{6} \sum_{t=1}^6 R_{0,t}^i \right) \right], \quad 1 \leq i \leq 6, \quad 1 \leq t \leq 6 \quad (47)$$

此處， $j = \arg \text{Max}_i \left(\frac{I_t^i}{I_0^i} - 1 \right)$ ， $R_{0,t}^i = \text{Max} \left(F, \text{Max}_{i \in \text{basket}} \left(\frac{I_t^i}{I_0^i} - 1 \right) \right) > 0$ ， $1 \leq i \leq 6$ ， $j \neq i$ 。

若這六檔股票在先前任一評價日有最高績效 $R_{0,t}^i$ ，則該股票從投資組合 (basket)

中移除，且該股份的 $R_{0,t}^i$ 於商品剩餘期間設定為 0%。

由於多資產 Quanto EIA 商品無封閉解，本研究用蒙地卡羅法來模擬其價格，以下為模擬的步驟：

步驟一：計算 2005/1/4~2006/12/29 這段期間內，此六檔股票、澳幣對美元匯率每日的報酬率，

步驟二：計算六檔股票和匯率的共變異數矩陣、相關係數和波動度

步驟三：用 cholesky decomposition 將共變異數矩陣拆解為下三角矩陣和上三角矩陣。

步驟四：開始模擬在 Q 測度下的每日股票動態，亦即模擬公式 (45)

步驟五：將步驟四的結果帶入公式 (47)，計算商品 payoff

步驟六：用澳幣五年期公債利率折現

根據上述步驟，我們模擬 10000 次，得出商品價格為 88.66 元。接著，我們調整參與率和下限率，看這兩種參數對商品成本的影響。我們設定 $\alpha = 0.6、0.8、1、1.2、1.5$ ， $F = 0.15、0.2、0.25、0.3、0.35$ 。下表為多資產 Quanto EIA 商品的價格變化和標準誤， α 代表參與率， F_g 代表下限率 (Floor rate per year)。

表 12、多資產 Quanto EIA 商品的價格變化以及標準誤

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.98	86.17	88.83	91.79	94.95
0.8	87.02	88.66	90.79	93.29	96.08
1.0	90.39	91.65	93.34	95.43	97.83
1.2	93.92	94.92	96.29	98.02	100.08
1.5	99.40	100.13	101.17	102.50	104.13
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0637	0.0530	0.0431	0.0346	0.0275
0.8	0.0951	0.0849	0.0742	0.0639	0.0544
1.0	0.1255	0.1164	0.1061	0.0954	0.0849
1.2	0.1552	0.1472	0.1377	0.1273	0.1166
1.5	0.1987	0.1922	0.1840	0.1746	0.1644

從表 12 中數字可看出，誠如單一資產 Quanto EIA 商品一樣，當參與率越高，保證率越高時，商品成本也就越高。而 A 保險公司發行的 B 商品在期初價格為 88.66 元，投資人在期初投入本金 100 元，因此，發行商賺取的金額為 11.34 元，報酬率為 11.34%。除此之外，從表 12 藍色格子中可發現，當參與率為 1.2，保證率為 15%、參與率為 1.0，下限率為 25%，以及當參與率為 0.6，下限率為 35% 時，商品的期初成本非常接近，發行商亦可運用調整參與率及下限率來吸引投資人投資。

接下來，我們將變異數縮減技術放入 B 商品中，再此，我們運用了控制變數法和反向變異法。首先，我們先檢視 B 商品連結標的績效大於下限率的機率，亦即價內 (in the money) 的機率：

表 13、多資產 Quanto EIA 商品的 in the money 機率

Participation α	Floor rate F_g (per year)				
	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	45.54%	29.93%	19.07%	12.03%	7.62%
0.8	60.64%	45.54%	33.21%	23.74%	17.07%
1.0	70.47%	57.47%	45.54%	35.41%	27.24%
1.2	76.93%	66.18%	55.57%	45.54%	37.01%
1.5	83.26%	74.84%	66.18%	57.47%	49.58%

接著，我們使用變異數縮減比率 (Variance reduction ratio, VRR) 作為衡量變異數縮減的效能，以下為 VRR 的定義 (參見 Hsieh and Chiu (2007))：

$$VRR = \frac{\text{Var}(\text{naive estimator})}{\text{Var}(\text{estimator with control variate(s)})}$$

本研究根據商品的 payoff 形式找了七個控制變數，分別為：

1. 算術平均控制變數 C_1^A

$$C_1^A = R_{0,1}^1 + R_{0,2}^2 + R_{0,3}^3 + R_{0,4}^4 + R_{0,5}^5 + R_{0,6}^6$$

此處， $R_{0,t}^i = \frac{I_t^i}{I_0^i}$ ， $1 \leq i \leq 6$ ， $1 \leq t \leq 6$ ， i 代表第 i 檔標的， t 代表時間點。

以下為 C_1^A 的封閉解：

$$\begin{aligned}
E(C_1^A) &= E(R_{0,1}^1) + E(R_{0,2}^2) + E(R_{0,3}^3) + E(R_{0,4}^4) + E(R_{0,5}^5) + E(R_{0,6}^6) \\
&= \exp(r_f - \rho_{1,c}\sigma_1\sigma_c) + \exp(r_f - \rho_{2,c}\sigma_1\sigma_c)2 + \exp(r_f - \rho_{3,c}\sigma_3\sigma_c)3 \\
&\quad + \exp(r_f - \rho_{4,c}\sigma_4\sigma_c)4 + \exp(r_f - \rho_{5,c}\sigma_5\sigma_c)5 + \exp(r_f - \rho_{6,c}\sigma_6\sigma_c)6
\end{aligned}$$

2. 幾何平均控制變數 C_1^G

$$C_1^G = \sqrt[6]{R_{0,1}^1 \times R_{0,2}^2 \times R_{0,3}^3 \times R_{0,4}^4 \times R_{0,5}^5 \times R_{0,6}^6} - 1$$

此處， $R_{0,t}^i = \frac{I_t^i}{I_0^i}$ ， $1 \leq i \leq 6$ ， $1 \leq t \leq 6$ ， i 代表第 i 檔標的， t 代表時間點。

以下為 C_1^G 的封閉解：

$$\text{令 } \mu = \begin{pmatrix} \exp\left(r_f - \rho_{c,1}\sigma_c\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right) \\ \exp\left(r_f - \rho_{c,2}\sigma_c\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right) \\ \vdots \\ \exp\left(r_f - \rho_{c,6}\sigma_c\sigma_6 - \frac{1}{2}\sigma_6^2\right) \end{pmatrix}, \quad \Sigma \text{ 為共變異矩陣, } Z \sim N(0,1),$$

$$\begin{aligned}
E(C_1^G) &= E\left(\exp\left(\frac{1}{6}(\mu_A + \mu_B + \mu_C + \mu_D + \mu_E + \mu_F + \sigma^*Z)\right) - 1\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{6}(\mu_A + \mu_B + \mu_C + \mu_D + \mu_E + \mu_F)\right) \times E\left(\exp\left(\frac{1}{6}\sigma^*Z\right)\right) - 1 \\
&= \exp\left(\frac{1}{6}(\mu_A + \mu_B + \mu_C + \mu_D + \mu_E + \mu_F) + \frac{1}{72}\sigma^{*2}\right) - 1
\end{aligned}$$

此處， μ_A 代表 μ 矩陣內每個元素的加總， μ_B 代表 $\mu(2:6)$ 子矩陣每個元素的加總， μ_C 代表 $\mu(3:6)$ 子矩陣每個元素的加總， μ_D 代表 $\mu(4:6)$ 子矩陣每個元素的加總， μ_E 代表 $\mu(5:6)$ 子矩陣每個元素的加總， μ_F 代表 $\mu(6)$ 。而 σ^* 代表所有 Σ 的子矩陣的加總。

3. 極值幾何平均控制變數 C_1^+

$$C_1^+ = \max(F, C_1^G) = \max\left(F, \sqrt[6]{R_{0,1}^1 \times R_{0,2}^2 \times R_{0,3}^3 \times R_{0,4}^4 \times R_{0,5}^5 \times R_{0,6}^6} - 1\right)$$

此處， $R_{0,t}^i = \frac{I_t^i}{I_0^i}$ ， $1 \leq i \leq 6$ ， $1 \leq t \leq 6$ ， i 代表第 i 檔標的， t 代表時間點。

以下為 C_1^+ 的封閉解：

$$E(C_1^+) = E(F \cdot I(F > C_1^G)) + E(C_1^G \cdot I(C_1^G > F))。$$

首先，先推導 $E(F \cdot I(F > C_1^G))$ ，

$$C_1^G = \exp\left(\frac{1}{6}(\mu_A + \mu_B + \mu_C + \mu_D + \mu_E + \mu_F + \sigma^* Z)\right) - 1 = \exp(\mu^* + \sigma^{**} Z) - 1$$

$$E(F \cdot I(F > C_1^G)) = F \cdot \Pr(F > \exp(\mu^* + \sigma^{**} Z) - 1) = F \cdot \Pr\left(\frac{\ln(1+F) - \mu^*}{\sigma^{**}} > Z\right) = F \cdot N(d1)$$

$$\text{在此， } d1 = \frac{\ln(1+F) - \mu^*}{\sigma^{**}} \circ \mu^* = \frac{1}{6}(\mu_A + \mu_B + \mu_C + \mu_D + \mu_E + \mu_F), \sigma^{**} = \frac{1}{6}\sigma^*,$$

其餘符號代表的意義，可參見 C_1^G 的推導。

接下來，推導 $E(C_1^G \cdot I(C_1^G > F))$ ：

$$\begin{aligned} E(C_1^G \cdot I(C_1^G > F)) &= E((\exp(\mu^* + \sigma^{**} Z) - 1) \cdot I(Z > d1)) \\ &= E(\exp(\mu^* + \sigma^{**} Z) \cdot I(Z > d1)) - E(I(Z > d1)) \\ &= \exp\left(\mu^* + \frac{1}{2}\sigma^{**}\right) \times N(-d1 + \sigma^{**}) - 1 + N(d1) \end{aligned}$$

$$\text{因此， } E(C_1^+) = F \cdot N(d1) + \exp\left(\mu^* + \frac{1}{2}\sigma^{**}\right) \times N(-d1 + \sigma^{**}) - 1 + N(d1)。$$

4. 算術平均控制變數 C_2^A

$$C_2^A = R_{0,1}^6 + R_{0,2}^5 + R_{0,3}^4 + R_{0,4}^3 + R_{0,5}^2 + R_{0,6}^1$$

此處， $R_{0,t}^i = \frac{I_t^i}{I_0^i}$ ， $1 \leq i \leq 6$ ， $1 \leq t \leq 6$ ， i 代表第 i 檔標的， t 代表時間點。

以下為 C_2^A 的封閉解：

$$\begin{aligned} E(C_2^A) &= E(R_{0,1}^6) + E(R_{0,2}^5) + E(R_{0,3}^4) + E(R_{0,4}^3) + E(R_{0,5}^2) + E(R_{0,6}^1) \\ &= \exp((r_f - \rho_{1,c}\sigma_1\sigma_c)6) + \exp((r_f - \rho_{2,c}\sigma_2\sigma_c)5) + \exp((r_f - \rho_{3,c}\sigma_3\sigma_c)4) \\ &\quad + \exp((r_f - \rho_{4,c}\sigma_4\sigma_c)3) + \exp((r_f - \rho_{5,c}\sigma_5\sigma_c)2) + \exp((r_f - \rho_{6,c}\sigma_6\sigma_c)1) \end{aligned}$$

5. 幾何平均控制變數 C_2^G

$$C_2^G = \sqrt[6]{R_{0,1}^6 \times R_{0,2}^5 \times R_{0,3}^4 \times R_{0,4}^3 \times R_{0,5}^2 \times R_{0,6}^1} - 1$$

此處， $R_{0,t}^i = \frac{I_t^i}{I_0^i}$ ， $1 \leq i \leq 6$ ， $1 \leq t \leq 6$ ， i 代表第 i 檔標的， t 代表時間點。

以下為 C_2^G 的封閉解：

$$\text{令 } \tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \exp\left(r_f - \rho_{c,6}\sigma_c\sigma_6 - \frac{1}{2}\sigma_6^2\right) \\ \exp\left(r_f - \rho_{c,5}\sigma_c\sigma_5 - \frac{1}{2}\sigma_5^2\right) \\ \vdots \\ \exp\left(r_f - \rho_{c,1}\sigma_c\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right) \end{pmatrix}, \quad \Sigma \text{ 為共變異矩陣, } Z \sim N(0,1),$$

$$\begin{aligned} E(C_2^G) &= E\left(\exp\left(\frac{1}{6}(\tilde{\mu}_A + \tilde{\mu}_B + \tilde{\mu}_C + \tilde{\mu}_D + \tilde{\mu}_E + \tilde{\mu}_F + \tilde{\sigma}^* Z)\right) - 1\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{6}(\tilde{\mu}_A + \tilde{\mu}_B + \tilde{\mu}_C + \tilde{\mu}_D + \tilde{\mu}_E + \tilde{\mu}_F)\right) \times E\left(\exp\left(\frac{1}{6}\tilde{\sigma}^* Z\right)\right) - 1 \\ &= \exp\left(\frac{1}{6}(\tilde{\mu}_A + \tilde{\mu}_B + \tilde{\mu}_C + \tilde{\mu}_D + \tilde{\mu}_E + \tilde{\mu}_F) + \frac{1}{72}\tilde{\sigma}^{*2}\right) - 1 \end{aligned}$$

此處， $\tilde{\mu}_A$ 代表 $\tilde{\mu}$ 矩陣內每個元素的加總， $\tilde{\mu}_B$ 代表 $\tilde{\mu}(2:6)$ 子矩陣每個元素的加總， $\tilde{\mu}_C$ 代表 $\tilde{\mu}(3:6)$ 子矩陣每個元素的加總， $\tilde{\mu}_D$ 代表 $\tilde{\mu}(4:6)$ 子矩陣每個元素的加總， $\tilde{\mu}_E$ 代表 $\tilde{\mu}(5:6)$ 子矩陣每個元素的加總， $\tilde{\mu}_F$ 代表 $\tilde{\mu}(6)$ 。而 $\tilde{\sigma}^*$ 代表所有 Σ 的子矩陣的加總。

6. 極值幾何平均控制變數 C_2^+

$$C_2^+ = \max(F, C_2^G) = \max\left(F, \sqrt[6]{R_{0,1}^6 \times R_{0,2}^5 \times R_{0,3}^4 \times R_{0,4}^3 \times R_{0,5}^2 \times R_{0,6}^1} - 1\right)$$

此處， $R_{0,t}^i = \frac{I_t^i}{I_0^i}$ ， $1 \leq i \leq 6$ ， $1 \leq t \leq 6$ ， i 代表第 i 檔標的， t 代表時間點。

以下為 C_2^+ 的封閉解推導：

$$E(C_2^+) = E(F \cdot I(F > C_2^G)) + E(C_2^G \cdot I(C_2^G > F))。$$

首先，先推導 $E(F \cdot I(F > C_2^G))$ ，

$$C_2^G = \exp\left(\frac{1}{6}(\tilde{\mu}_A + \tilde{\mu}_B + \tilde{\mu}_C + \tilde{\mu}_D + \tilde{\mu}_E + \tilde{\mu}_F + \tilde{\sigma}^* Z)\right) - 1 = \exp(\tilde{\mu}^* + \tilde{\sigma}^{**} Z) - 1，$$

$$E(F \cdot I(F > C_2^G)) = F \cdot \Pr(F > \exp(\tilde{\mu}^* + \tilde{\sigma}^{**} Z) - 1) = F \cdot \Pr\left(\frac{\ln(1+F) - \tilde{\mu}^*}{\tilde{\sigma}^{**}} > Z\right) = F \cdot N(d1^*)$$

在此， $d1^* = \frac{\ln(1+F) - \tilde{\mu}^*}{\tilde{\sigma}^{**}}$ 。 $\tilde{\mu}^* = \frac{1}{6}(\tilde{\mu}_A + \tilde{\mu}_B + \tilde{\mu}_C + \tilde{\mu}_D + \tilde{\mu}_E + \tilde{\mu}_F)$ ， $\tilde{\sigma}^{**} = \frac{1}{6}\tilde{\sigma}^*$ ，

其餘符號代表的意義，可參見 C_2^G 的推導。

接下來，推導 $E(C_2^G \cdot I(C_2^G > F))$ ：

$$\begin{aligned} E(C_2^G \cdot I(C_2^G > F)) &= E((\exp(\tilde{\mu}^* + \tilde{\sigma}^{**} Z) - 1) \cdot I(Z > d1^*)) \\ &= E(\exp(\tilde{\mu}^* + \tilde{\sigma}^{**} Z) \cdot I(Z > d1^*)) - E(I(Z > d1^*)) \\ &= \exp\left(\tilde{\mu}^* + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^{**}\right) \times N(-d1^* + \tilde{\sigma}^{**}) - 1 + N(d1^*) \end{aligned}$$

$$\text{因此， } E(C_2^+) = F \cdot N(d1^*) + \exp\left(\tilde{\mu}^* + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^{**}\right) \times N(-d1^* + \tilde{\sigma}^{**}) - 1 + N(d1^*)。$$

7. 單一資產算術平均控制變數 C_1^{SA}

$$C_1^{SA} = R_{0,1}^6 + R_{0,2}^6 + R_{0,3}^6 + R_{0,4}^6 + R_{0,5}^6 + R_{0,6}^6$$

此處， $R_{0,t}^i = \frac{I_t^i}{I_0^i}$ ，代表只挑取第六檔標的的報酬， $1 \leq t \leq 6$ ， i 代表第 i 檔標

的， t 代表時間點。

以下為 C_1^{SA} 的封閉解：

$$\begin{aligned} E(C_1^{SA}) &= E(R_{0,1}^6) + E(R_{0,2}^6) + E(R_{0,3}^6) + E(R_{0,4}^6) + E(R_{0,5}^6) + E(R_{0,6}^6) \\ &= \exp((r_f - \rho_{6,c} \sigma_6 \sigma_c) \delta) + \exp((r_f - \rho_{6,c} \sigma_6 \sigma_c) \beta) + \exp((r_f - \rho_{6,c} \sigma_6 \sigma_c) A) \\ &\quad + \exp((r_f - \rho_{6,c} \sigma_6 \sigma_c) \beta) + \exp((r_f - \rho_{6,c} \sigma_6 \sigma_c) \delta) + \exp((r_f - \rho_{6,c} \sigma_6 \sigma_c) \delta) \end{aligned}$$

本研究找此七種控制變數的方法主要是根據商品 payoff，找尋出與 payoff 極為相似的形式。首先，由於本商品計算報酬的方式為六檔標的挑出最大的報酬率當作第一期的報酬率，接著將此標的排除在投資組合外。因此，我們在找尋控制變數時，首先假設 I^1 為第一年產生最大的報酬率標的， I^2 為第二年產生最大的報酬率標的， I^3 為第三年產生最大的報酬率標的， I^4 為第四年產生最大的報酬率標的， I^5 為第五年產生最大的報酬率標的， I^6 為第六年產生最大的報酬率標的，這樣就產生出第一個平均控制變數 C_1^A 。接著，將算術平均的概念改成幾何平均，產生了第二箇控制變數 C_1^G 。經過模擬後，發現 C_1^G 的效果高於 C_1^A ，因此，我們再將 C_1^G 與 F_g 取最大值，使其更符合商品的 payoff，產生了第三箇控制變數 C_1^+ 。

實驗結果發現當控制變數處於價內 (in the money) 時，效果較佳，且控制變數與商品的相關性越高，因此，我們試著將先前的做法倒過來，也就是假設 I^6 為第一年產生最大的報酬率標的， I^5 為第二年產生最大的報酬率標的， I^4 為第三年產生最大的報酬率標的， I^3 為第四年產生最大的報酬率標的， I^2 為第五年產生最大的報酬率標的， I^1 為第六年產生最大的報酬率標的，接下來的做法如同先前一樣，產生了第四到第六個控制變數 (算術平均控制變數 C_2^A 、幾何平均控制變數 C_2^G)。最後，基於要讓控制變數價內機率增高，便假設每年只用最高報酬率的 I^6 來做計算，因此產生了第七個控制變數 C_1^{SA} 。

我們將此七種控制變數放入模擬，發現 C_1^A 、 C_1^G 、 C_2^A 、 C_2^G 、 C_1^{SA} 這五個控制變數的成效並不大，因此本研究只列出 C_1^+ 和 C_2^+ 的成效。表 14 為控制變數 C_1^+ 的平均數、標準誤及 VRR。

表 14、控制變數 C_1^+ 的平均數、標準誤及 VRR

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.92	86.13	88.80	91.76	94.93
0.8	86.93	88.59	90.74	93.25	96.05
1.0	90.28	91.55	93.27	95.37	97.79
1.2	93.79	94.80	96.20	97.95	100.02
1.5	99.23	99.99	101.05	102.40	104.04
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0425	0.0362	0.0303	0.0252	0.0208
0.8	0.0640	0.0578	0.0513	0.0449	0.0390
1.0	0.0856	0.0804	0.0741	0.0675	0.0610
1.2	0.1067	0.1028	0.0976	0.0915	0.0850
1.5	0.1378	0.1360	0.1326	0.1280	0.1226
變異數縮減比率 (Variance Reduction Ratio)					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	2.25	2.14	2.02	1.88	1.75

0.8	2.20	2.15	2.09	2.02	1.94
1.0	2.15	2.10	2.05	1.99	1.94
1.2	2.11	2.05	1.99	1.94	1.88
1.5	2.08	2.00	1.92	1.86	1.80

表中數字可看出估計的價值與 B 商品模擬的價值很接近，標準誤介於 0.02~0.14 之間，當參與率越高時，標準誤也隨之變高。Variance Reduction Ratio (VRR) 最好為縮減 2.25 倍。效果並非如此顯著，所以我們嘗試控制變數 C_2^+ 。表 15 為控制變數 C_2^+ 的平均數、標準誤及 VRR。

表 15、控制變數 C_2^+ 的平均數、標準誤及 VRR

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.95	86.15	88.81	91.78	94.94
0.8	86.98	88.63	90.77	93.27	96.06
1.0	90.34	91.61	93.31	95.40	97.81
1.2	93.87	94.87	96.25	97.98	100.05
1.5	99.33	100.07	101.11	102.45	104.08
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0399	0.0341	0.0287	0.0241	0.0199
0.8	0.0601	0.0544	0.0482	0.0424	0.0369
1.0	0.0804	0.0757	0.0701	0.0641	0.0580
1.2	0.1004	0.0971	0.0927	0.0874	0.0817
1.5	0.1298	0.1288	0.1265	0.1231	0.1188
變異數縮減比率 (Variance Reduction Ratio)					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	2.54	2.42	2.25	2.06	1.92
0.8	2.50	2.44	2.36	2.27	2.17
1.0	2.44	2.36	2.29	2.22	2.14
1.2	2.39	2.30	2.21	2.12	2.04
1.5	2.34	2.23	2.12	2.01	1.91

控制變數 C_2^+ 的平均和 B 商品價格相較之下，差異並不大，標準誤比 C_1^+ 的標準誤小，大約介於 0.01~0.13 之間。另外從這兩個表的 VRR 數值可看出，單獨的控

制變數，變異數縮減效果並沒那樣有效率，因此，我們嘗試將多個控制變數放入模擬。我們將 C_1^+ 和 C_2^+ 同時放入模擬中，表 16 為兩者同時放入模擬時的平均、標準誤和 VRR。

表 16、同時使用控制變數 C_1^+ 和 C_2^+ 的平均數、標準誤及 VRR

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.93	86.14	88.80	91.77	94.93
0.8	86.95	88.60	90.74	93.26	96.05
1.0	90.29	91.57	93.28	95.38	97.79
1.2	93.81	94.82	96.21	97.95	100.02
1.5	99.26	100.01	101.06	102.41	104.05
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0345	0.0296	0.0253	0.0214	0.0180
0.8	0.0523	0.0472	0.0419	0.0369	0.0324
1.0	0.0706	0.0663	0.0613	0.0561	0.0509
1.2	0.0886	0.0858	0.0818	0.0772	0.0722
1.5	0.1151	0.1146	0.1128	0.1100	0.1065
變異數縮減比率 (Variance Reduction Ratio)					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	3.40	3.20	2.91	2.60	2.34
0.8	3.30	3.23	3.13	2.99	2.83
1.0	3.16	3.08	2.99	2.90	2.79
1.2	3.07	2.94	2.83	2.72	2.61
1.5	2.98	2.81	2.66	2.52	2.39

表 16 的 VRR 數字中可發現，將兩種控制變數放入模擬，比單獨的控制變數效率快了一倍左右，亦即 VRR 的數值從 2 變為 3。由於實驗結果並沒預期中來的有效率，所以，本研究也使用反向變異法來增進模擬效率，將 B 商品做反向變異 (antithetic)，並加入七個控制變數做模擬，實驗後的效果，仍然是 C_1^+ 和 C_2^+ 的成效較佳，以下便針對此兩種控制變數做分析。首先，先檢視 B 商品做反向變異後的結果。表 17 為 B 商品作反向變異的平均數、標準誤和 VRR。

表 17、商品做反向變異法的平均數、標準誤和 VRR

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.97	86.18	88.83	91.79	94.95
0.8	86.98	88.64	90.79	93.30	96.09
1.0	90.32	91.60	93.32	95.43	97.84
1.2	93.84	94.85	96.25	98.00	100.08
1.5	99.29	100.03	101.08	102.44	104.09
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0380	0.0340	0.0288	0.0236	0.0190
0.8	0.0520	0.0506	0.0469	0.0420	0.0366
1.0	0.0646	0.0649	0.0633	0.0598	0.0550
1.2	0.0767	0.0779	0.0778	0.0759	0.0725
1.5	0.0945	0.0963	0.0974	0.0974	0.0961
變異數縮減比率 (Variance Reduction Ratio)					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	2.81	2.43	2.24	2.14	2.09
0.8	3.34	2.81	2.50	2.32	2.21
1.0	3.77	3.21	2.81	2.55	2.38
1.2	4.09	3.57	3.13	2.81	2.58
1.5	4.42	3.98	3.57	3.21	2.93

將商品做反向變異後，VRR 效果最高可達 4.42 倍，比原先單獨的控制變數來的佳，因此，本研究試著放入控制變數模擬，希望能使變異數縮減效果更加提升。

表 18 為 B 商品做反向變異，並加入控制變數 C_1^+ 後的平均數、標準誤和 VRR：

表 18、商品做反向變異法，並加入 C_1^+ 的平均數、標準誤和 VRR

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.95	86.16	88.82	91.78	94.95
0.8	86.95	88.62	90.77	93.29	96.08
1.0	90.29	91.57	93.30	95.40	97.82
1.2	93.81	94.82	96.22	97.97	100.05
1.5	99.25	99.99	101.05	102.41	104.06
標準誤					

α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0345	0.0307	0.0259	0.0212	0.0171
0.8	0.0476	0.0458	0.0421	0.0375	0.0327
1.0	0.0594	0.0590	0.0570	0.0536	0.0493
1.2	0.0708	0.0711	0.0704	0.0684	0.0652
1.5	0.0876	0.0884	0.0886	0.0882	0.0869
變異數縮減比率 (Variance Reduction Ratio)					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	3.41	2.99	2.78	2.65	2.57
0.8	3.99	3.44	3.10	2.90	2.77
1.0	4.46	3.89	3.46	3.17	2.97
1.2	4.80	4.28	3.83	3.47	3.20
1.5	5.14	4.73	4.31	3.92	3.58

從表 18 中 VRR 數據可發現，VRR 效果最高可達 5.14 倍。接著將 C_2^+ 放入模擬，表 19 為 B 商品做反向變異，並加入控制變數 C_2^+ 後的平均數、標準誤和 VRR：

表 19、商品做反向變異法，並加入 C_2^+ 的平均數、標準誤和 VRR

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.96	86.17	88.83	91.79	94.95
0.8	86.97	88.63	90.78	93.30	96.08
1.0	90.31	91.59	93.31	95.41	97.83
1.2	93.83	94.84	96.23	97.99	100.06
1.5	99.28	100.01	101.07	102.42	104.07
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0343	0.0303	0.0255	0.0209	0.0169
0.8	0.0473	0.0453	0.0415	0.0369	0.0321
1.0	0.0592	0.0585	0.0563	0.0528	0.0485
1.2	0.0707	0.0706	0.0696	0.0674	0.0643
1.5	0.0876	0.0878	0.0877	0.0871	0.0858
變異數縮減比率 (Variance Reduction Ratio)					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	3.45	3.06	2.85	2.73	2.65
0.8	4.03	3.51	3.19	3.00	2.87

1.0	4.49	3.96	3.55	3.27	3.07
1.2	4.82	4.35	3.92	3.56	3.29
1.5	5.15	4.79	4.40	4.01	3.67

最高的 VRR (5.15 倍) 與之前效果差異不大，因此本研究將 C_1^+ 和 C_2^+ 同時放入模擬，表 20 為 B 原商品做反向變異，並加入控制變數 C_1^+ 和 C_2^+ 後的平均數、標準誤和 VRR：

表 20、商品做反向變異法，並加入 C_1^+ 和 C_2^+ 的平均數、標準誤和 VRR

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.95	86.16	88.82	91.79	94.95
0.8	86.96	88.62	90.77	93.29	96.08
1.0	90.30	91.58	93.30	95.41	97.82
1.2	93.81	94.82	96.22	97.98	100.05
1.5	99.26	100.00	101.05	102.41	104.06
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0336	0.0296	0.0249	0.0204	0.0164
0.8	0.0464	0.0443	0.0405	0.0359	0.0312
1.0	0.0581	0.0572	0.0549	0.0514	0.0471
1.2	0.0694	0.0691	0.0680	0.0658	0.0625
1.5	0.0861	0.0861	0.0859	0.0851	0.0836
變異數縮減比率 (Variance Reduction Ratio)					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	3.59	3.20	3.00	2.87	2.79
0.8	4.19	3.67	3.35	3.16	3.04
1.0	4.66	4.14	3.73	3.44	3.25
1.2	5.00	4.53	4.10	3.75	3.48
1.5	5.33	4.98	4.59	4.21	3.87

從上表可發現，變異數縮減效果比單獨放入控制變數來的佳，但並沒有造成非常大的縮減效果，原因可能為 C_1^+ 和 C_2^+ 的相關係數過高。整體看來 VRR 介於 3~5.33 之間。接著，本研究將控制變數同樣也做反向變異法，並放入已做反向變異法後

的商品中，從實驗結果中可得，做了反向變異法後的 C_1^+ 和 C_2^+ 效果亦最佳，因此，本研究只列出 C_1^+ 和 C_2^+ 加入反向變異法後的成果。表 21 為 B 商品作反向變異， C_1^+ 也做反向變異後的平均數、標準誤和 VRR。

表 21、商品做反向變異法， C_1^+ 也做反向變異後的平均數、標準誤和 VRR

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.92	86.13	88.80	91.77	94.93
0.8	86.91	88.58	90.73	93.26	96.05
1.0	90.25	91.52	93.25	95.36	97.78
1.2	93.75	94.76	96.16	97.92	100.00
1.5	99.19	99.92	100.97	102.34	103.99
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0280	0.0248	0.0211	0.0177	0.0146
0.8	0.0393	0.0374	0.0344	0.0308	0.0271
1.0	0.0499	0.0489	0.0472	0.0445	0.0411
1.2	0.0602	0.0597	0.0588	0.0573	0.0549
1.5	0.0753	0.0752	0.0751	0.0749	0.0741
變異數縮減比率 (Variance Reduction Ratio)					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	5.17	4.56	4.16	3.83	3.54
0.8	5.84	5.14	4.64	4.29	4.03
1.0	6.33	5.66	5.06	4.60	4.27
1.2	6.65	6.08	5.47	4.94	4.51
1.5	6.96	6.53	6.01	5.44	4.92

從此表就可發現，最高的 VRR 已達 6.96，接近 7 倍。接下來我們將 C_2^+ 做反向變異法，放入亦做反向變異法的原商品中，表 22 列出其平均數、標準誤和 VRR。

表 22、商品做反向變異法， C_2^+ 也做反向變異後的平均數、標準誤和 VRR

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.96	86.18	88.83	91.79	94.95
0.8	86.98	88.64	90.79	93.30	96.08
1.0	90.32	91.60	93.32	95.42	97.83

1.2	93.84	94.85	96.25	98.00	100.06
1.5	99.29	100.03	101.08	102.44	104.08
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0267	0.0235	0.0200	0.0168	0.0139
0.8	0.0378	0.0356	0.0325	0.0291	0.0256
1.0	0.0483	0.0468	0.0447	0.0421	0.0390
1.2	0.0586	0.0573	0.0561	0.0546	0.0525
1.5	0.0737	0.0727	0.0720	0.0717	0.0713
變異數縮減比率 (Variance Reduction Ratio)					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	5.67	5.09	4.64	4.23	3.90
0.8	6.31	5.70	5.21	4.82	4.52
1.0	6.75	6.20	5.63	5.13	4.74
1.2	7.02	6.59	6.02	5.44	4.94
1.5	7.27	6.98	6.52	5.93	5.32

從數據可觀察到，變異數縮減效果最大已經超過 7 倍，整體的 VRR 介於 4~7.27 間。將 C_1^+ 和 C_2^+ 同時做反向變異法，並放入亦做反向變異法的原商品中，表 23 列出其平均數、標準誤和 VRR。

表 23、商品做反向變異法， C_1^+ 和 C_2^+ 也做反向變異後的平均數、標準誤和 VRR

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.94	86.15	88.81	91.78	94.94
0.8	86.94	88.61	90.76	93.27	96.06
1.0	90.28	91.56	93.28	95.38	97.80
1.2	93.78	94.80	96.20	97.95	100.02
1.5	99.23	99.96	101.02	102.38	104.02
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0235	0.0205	0.0176	0.0149	0.0125
0.8	0.0338	0.0314	0.0286	0.0255	0.0225
1.0	0.0437	0.0418	0.0397	0.0373	0.0344
1.2	0.0534	0.0518	0.0503	0.0488	0.0468
1.5	0.0678	0.0664	0.0653	0.0648	0.0643

變異數縮減比率 (Variance Reduction Ratio)					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	7.33	6.66	6.02	5.38	4.80
0.8	7.91	7.30	6.74	6.27	5.86
1.0	8.24	7.75	7.13	6.55	6.08
1.2	8.43	8.08	7.49	6.82	6.21
1.5	8.59	8.39	7.94	7.27	6.55

從表 17 到表 23 可看出，當 B 商品做反向變異法，且極值幾何平均控制變數 C_1^+ 和 C_2^+ 也同時做反向變異法時，變異數縮減效果最好，最高可達 8.59 倍，接近 9 倍。以參與率 0.8，保證收益率 20% 為例，VRR 等於 7.30，代表變異數縮減效果使得新的變異數相較於原本的變異數，縮小了 7.3 倍，也就是說模擬次數約 1400 次就可達到模擬 10000 次的精準度，而模擬所花的時間也會減少 7.3 倍。

接下來，我們來比較商品價內的機率與 VRR 效果關係。首先，先檢視原商品做了反向變異後，商品價格價內 (in the money) 的機率。

表 24、多資產 Quanto EIA 商品做反向變異法後 in the money 機率

Participation α	Floor rate F_g (per year)				
	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.34%	58.28%	38.09%	24.23%	15.17%
0.8	96.47%	83.34%	64.23%	47.32%	34.25%
1.0	99.27%	94.79%	83.34%	68.32%	53.56%
1.2	99.83%	98.5%	93.41%	83.34%	70.97%
1.5	99.97%	99.71%	98.5%	94.79%	88.01%

表 13 為商品價內的機率，表 25 為 B 商品做反向變異後價內的機率，此二表與上述變異數縮減 VRR 各表相比較，可發現當 in the money 機率越高時，VRR 越大，而保證率對 VRR 影響甚大。也就是說，固定參與率這個維度，當保證率越高，造成商品 in the money 機率越小，VRR 則較小，變異數縮減效果便較不好。

除此之外，本研究根據模擬 10000 次的平均數和標準差來反推最適樣本數。

若我們希望估計的樣本誤差在 95%信心水準下，可以限制在價格的千分之一以下，可透過以下相對精準度的公式來求出需要模擬的樣本數：

$$Z_{0.975} \frac{\hat{S}}{\sqrt{N}} = 0.001\bar{X}$$

$$\Rightarrow N = \left(Z_{0.975} \times 1000 \times \frac{\hat{S}}{\bar{X}} \right)^2$$

透過此公式，在 95%的信心水準之下，若想將原個案商品樣本誤差控制在千分之一，則至少須模擬的次數如下表：

表 25、控制誤差於 0.1%下，估計商品價格所需樣本數

樣本數					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	22077	14533	9043	5449	3221
0.8	45849	35212	25641	18003	12329
1.0	74064	61965	49638	38379	28923
1.2	104867	92371	78540	64813	52145
1.5	153539	141486	127055	111450	95786

使用控制變數 C_1^+ 後，最適樣本數為：

表 26、控制誤差於 0.1%下，使用控制變數 C_1^+ 估計商品價格所需樣本數

樣本數					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	9842	6784	4483	2895	1838
0.8	20854	16379	12273	8909	6344
1.0	34515	29591	24280	19261	14935
1.2	49739	45203	39532	33523	27757
1.5	74069	71056	66165	60031	53359

使用控制變數 C_2^+ 後，最適樣本數為：

表 27、控制誤差於 0.1% 下，使用控制變數 C_2^+ 估計商品價格所需樣本數

樣本數					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	8692	6009	4022	2641	1682
0.8	18346	14452	10852	7929	5680
1.0	30420	26227	21678	17337	13532
1.2	43941	40257	35599	30580	25603
1.5	65602	63609	60096	55450	50071

使用控制變數 C_1^+ 和 C_2^+ 後，最適樣本數為：

表 28、控制誤差於 0.1% 下，使用控制變數 C_1^+ 和 C_2^+ 估計商品價格所需樣本數

樣本數					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	6501	4549	3110	2098	1377
0.8	13921	10917	8200	6017	4358
1.0	23458	20163	16613	13270	10392
1.2	34261	31433	27781	23853	20030
1.5	51676	50445	47862	44305	40217

商品使用反向變異後，最適樣本數為：

表 29、控制誤差於 0.1% 下，使用反向變異法估計商品價格所需樣本數

樣本數					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	7852	5988	4042	2546	1539
0.8	13743	12524	10264	7770	5588
1.0	19668	19304	17656	15064	12159
1.2	25667	25917	25076	23055	20178
1.5	34793	35587	35658	34731	32729

商品使用反向變異法並加入控制變數 C_1^+ 後，最適樣本數為：

表 30、控制誤差於 0.1% 下，使用反向變異並加入控制變數 C_1^+ 估計商品價格所需樣本數

樣本數					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	6487	4862	3258	2054	1252
0.8	11496	10238	8273	6212	4454
1.0	16640	15942	14349	12128	9742
1.2	21907	21604	20559	18719	16313
1.5	29959	30000	29567	28516	26768

商品使用反向變異法並加入控制變數 C_2^+ 後，最適樣本數為：

表 31、控制誤差於 0.1% 下，使用反向變異並加入控制變數 C_2^+ 估計商品價格所需樣本數

樣本數					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	6409	4754	3170	1999	1214
0.8	11386	10026	8034	6009	4299
1.0	16526	15651	13972	11758	9424
1.2	21805	21263	20066	18201	15840
1.5	29888	29629	28952	27813	26092

商品使用反向變異法並加入控制變數 C_1^+ 和 C_2^+ 後，最適樣本數為：

表 32、控制誤差於 0.1% 下，使用反向變異並加入控制變數 C_1^+ 和 C_2^+ 估計商品價格所需樣本數

樣本數					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	6147	4540	3016	1896	1153
0.8	10947	9590	7648	5693	4058
1.0	15923	15002	13325	11158	8906
1.2	21041	20419	19175	17307	15000
1.5	28883	28511	27733	26517	24780

除了商品使用反向變異法，控制變數 C_1^+ 也做反向變異，以下為最適樣本數為：

表 33、控制誤差於 0.1% 下，商品及控制變數 C_1^+ 同時使用反向變異法估計商品價格所需樣本數

樣本數					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	4278	3189	2175	1423	909
0.8	7865	6864	5538	4199	3059
1.0	11741	10985	9825	8353	6774
1.2	15825	15239	14387	13160	11587
1.5	22162	21751	21234	20552	19502

商品使用反向變異法，控制變數 C_2^+ 也做反向變異，以下為最適樣本數為：

表 34、控制誤差於 0.1% 下，商品及控制變數 C_2^+ 同時使用反向變異法估計商品價格所需樣本數

樣本數					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	3896	2854	1949	1288	826
0.8	7267	6179	4925	3733	2730
1.0	10991	10010	8825	7488	6100
1.2	14962	14041	13051	11925	10567
1.5	21177	20304	19508	18833	18012

商品使用反向變異法，控制變數 C_1^+ 和 C_2^+ 也做反向變異，以下為最適樣本數為：

表 35、控制誤差於 0.1% 下，商品及控制變數 C_1^+ 和 C_2^+ 同時使用反向變異法估計商品價格所需樣本數

樣本數					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	3016	2185	1503	1014	671
0.8	5810	4828	3807	2872	2104
1.0	9008	8013	6968	5867	4759
1.2	12477	11460	10506	9522	8410
1.5	17947	16926	16050	15372	14664

接著，我們根據這些新的樣本數來重新模擬商品價格。表 36 為原商品重新模擬

後的平均和標準誤：

表 36、控制誤差於 0.1% 下，商品用新樣本數模擬後的平均和標準誤

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.92	86.12	88.84	91.76	94.95
0.8	87.00	88.65	90.69	93.26	96.10
1.0	90.31	91.55	93.40	95.44	97.80
1.2	93.94	94.81	96.25	97.95	100.07
1.5	99.31	99.99	101.03	102.32	104.02
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0432	0.0433	0.0445	0.0442	0.0467
0.8	0.0445	0.0451	0.0450	0.0470	0.0500
1.0	0.0461	0.0462	0.0476	0.0481	0.0492
1.2	0.0482	0.0482	0.0491	0.0496	0.0509
1.5	0.0506	0.0510	0.0516	0.0519	0.0530

原先商品只模擬一萬次時，當參與率越高，標準誤相對的也就越高，但若使用最適樣本數模擬商品價格後，不論參與率高或低，標準誤皆為 0.04~0.05 左右。接下來，將上述所有控制變數都用最適樣本數模擬，觀察估計的價格和標準誤。表 37 為用最適樣本數模擬控制變數 C_1^+ 的平均數、標準誤。

表 37、控制誤差於 0.1% 下，新樣本數模擬控制變數 C_1^+ 的平均數、標準誤

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	84.03	86.17	88.86	91.73	94.95
0.8	86.95	88.61	90.79	93.27	96.07
1.0	90.37	91.64	93.29	95.39	97.88
1.2	93.89	94.75	96.20	98.01	100.06
1.5	99.23	99.95	100.98	102.37	104.02
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0422	0.0453	0.0472	0.0466	0.0516
0.8	0.0445	0.0463	0.0463	0.0476	0.0479

1.0	0.0469	0.0473	0.0478	0.0481	0.0516
1.2	0.0481	0.0484	0.0495	0.0506	0.0520
1.5	0.0511	0.0514	0.0519	0.0525	0.0539

表 38 為用最適樣本數模擬控制變數 C_2^+ 的平均數、標準誤。

表 38、控制誤差於 0.1% 下，新樣本數模擬控制變數 C_2^+ 的平均數、標準誤

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.92	86.21	88.88	91.72	94.98
0.8	86.99	88.63	90.73	93.38	96.09
1.0	90.25	91.60	93.34	95.39	97.83
1.2	93.81	94.82	96.27	98.00	100.03
1.5	99.26	100.00	101.06	102.46	104.02
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0418	0.0424	0.0473	0.0404	0.0437
0.8	0.0439	0.0450	0.0444	0.0491	0.0481
1.0	0.0457	0.0461	0.0481	0.0485	0.0485
1.2	0.0475	0.0479	0.0492	0.0497	0.0512
1.5	0.0503	0.0512	0.0518	0.0527	0.0528

表 39 為用最適樣本數模擬同時使用控制變數 C_1^+ 和 C_2^+ 的平均數、標準誤。

表 39、控制誤差於 0.1% 下，新樣本數模擬同時使用控制變數 C_1^+ 和 C_2^+ 的平均數、標準誤

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	84.04	86.18	88.88	91.76	94.91
0.8	86.97	88.56	90.78	93.28	96.08
1.0	90.25	91.62	93.29	95.44	97.77
1.2	93.80	94.84	96.26	98.03	99.98
1.5	99.25	100.04	101.05	102.48	104.13
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0417	0.0432	0.0462	0.0450	0.0546

0.8	0.0448	0.0441	0.0456	0.0461	0.0509
1.0	0.0458	0.0463	0.0476	0.0489	0.0500
1.2	0.0477	0.0483	0.0494	0.0505	0.0508
1.5	0.0504	0.0509	0.0516	0.0526	0.0530

接下來，將商品做反向變異。表 40 為用最適樣本數模擬反向變異法的商品價格和標準誤。

表 40、控制誤差於 0.1% 下，新樣本數模擬反向變異法商品的平均數、標準誤

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.93	86.18	88.87	91.77	94.94
0.8	86.98	88.69	90.75	93.24	96.05
1.0	90.30	91.51	93.30	95.37	97.86
1.2	93.73	94.78	96.22	98.03	100.11
1.5	99.26	100.04	101.00	102.53	104.02
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0422	0.0437	0.0447	0.0453	0.0489
0.8	0.0444	0.0455	0.0450	0.0467	0.0466
1.0	0.0454	0.0465	0.0476	0.0484	0.0493
1.2	0.0470	0.0476	0.0497	0.0501	0.0509
1.5	0.0505	0.0514	0.0514	0.0524	0.0524

將商品做反向變異後，並放入控制變數，用最適樣本數來模擬，表 41 為用最適樣本數模擬 C_1^+ 的價格和標準誤。

表 41、控制誤差於 0.1% 下，商品做反向變異法後並放入 C_1^+ 用新樣本數模擬的平均數、標準誤

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	84.03	86.17	88.86	91.73	94.95
0.8	86.95	88.61	90.79	93.27	96.07
1.0	90.37	91.64	93.29	95.39	97.88

1.2	93.89	94.75	96.20	98.01	100.06
1.5	99.23	99.95	100.98	102.37	104.02
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0422	0.0453	0.0472	0.0466	0.0516
0.8	0.0445	0.0463	0.0463	0.0476	0.0479
1.0	0.0469	0.0473	0.0478	0.0481	0.0516
1.2	0.0481	0.0484	0.0495	0.0506	0.0520
1.5	0.0511	0.0514	0.0519	0.0525	0.0539

表 42 為商品做反向變異後，放入 C_2^+ ，用最適樣本數模擬的平均和標準誤。

表 42、控制誤差於 0.1% 下，商品做反向變異法後並放入 C_2^+ 用新樣本數模擬的平均數、標準誤

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.92	86.21	88.88	91.72	94.98
0.8	86.99	88.63	90.73	93.38	96.09
1.0	90.25	91.60	93.34	95.39	97.83
1.2	93.81	94.82	96.27	98.00	100.03
1.5	99.26	100.00	101.06	102.46	104.02
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0418	0.0424	0.0473	0.0404	0.0437
0.8	0.0439	0.0450	0.0444	0.0491	0.0481
1.0	0.0457	0.0461	0.0481	0.0485	0.0485
1.2	0.0475	0.0479	0.0492	0.0497	0.0512
1.5	0.0503	0.0512	0.0518	0.0527	0.0528

表 43 為商品做反向變異後，放入 C_1^+ 和 C_2^+ ，用最適樣本數模擬的平均和標準誤。

表 43、控制誤差於 0.1% 下，商品做反向變異法後並放入 C_1^+ 和 C_2^+ 用新樣本數模擬的平均數、標準誤

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	84.04	86.18	88.88	91.76	94.91

0.8	86.97	88.56	90.78	93.28	96.08
1.0	90.25	91.62	93.29	95.44	97.77
1.2	93.80	94.84	96.26	98.03	99.98
1.5	99.25	100.04	101.05	102.48	104.13
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0417	0.0432	0.0462	0.0450	0.0546
0.8	0.0448	0.0441	0.0456	0.0461	0.0509
1.0	0.0458	0.0463	0.0476	0.0489	0.0500
1.2	0.0477	0.0483	0.0494	0.0505	0.0508
1.5	0.0504	0.0509	0.0516	0.0526	0.0530

接著，除了將商品做反向變異後，也將控制變數做反向變異。表 44 為商品和 C_1^+ 做反向變異後，用最適樣本數模擬的平均和標準誤。

表 44、控制誤差於 0.1% 下，商品和 C_1^+ 做反向變異後用新樣本數模擬的平均數、標準誤

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	84.01	86.16	88.79	91.77	94.88
0.8	86.93	88.54	90.77	93.31	96.15
1.0	90.27	91.63	93.21	95.43	97.79
1.2	93.85	94.87	96.33	97.98	100.03
1.5	99.32	99.95	101.10	102.48	104.01
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0443	0.0446	0.0422	0.0469	0.0466
0.8	0.0444	0.0450	0.0466	0.0475	0.0521
1.0	0.0467	0.0479	0.0477	0.0495	0.0500
1.2	0.0492	0.0493	0.0499	0.0508	0.0518
1.5	0.0519	0.0518	0.0528	0.0532	0.0535

表 45 為商品和 C_2^+ 做反向變異後，用新樣本數模擬的平均和標準誤。

表 45、控制誤差於 0.1% 下，商品和 C_2^+ 做反向變異後用新樣本數模擬的平均數、標準誤

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	84.00	86.14	88.80	91.77	94.97
0.8	86.90	88.62	90.85	93.33	96.11
1.0	90.36	91.56	93.24	95.42	97.67
1.2	93.84	94.90	96.22	97.92	100.08
1.5	99.24	100.02	101.05	102.40	104.09
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0429	0.0436	0.0459	0.0470	0.0442
0.8	0.0446	0.0452	0.0459	0.0473	0.0515
1.0	0.0463	0.0470	0.0479	0.0475	0.0487
1.2	0.0481	0.0485	0.0487	0.0496	0.0512
1.5	0.0510	0.0515	0.0525	0.0525	0.0529

表 46 為商品、 C_1^+ 和 C_2^+ 做反向變異後，用最適樣本數模擬的平均和標準誤。

表 46、控制誤差於 0.1% 下，商品、 C_1^+ 和 C_2^+ 做反向變異後用新樣本數模擬的平均數、標準誤

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	84.02	86.14	88.88	91.80	94.95
0.8	86.91	88.59	90.78	93.32	96.07
1.0	90.30	91.61	93.31	95.50	97.79
1.2	93.81	94.97	96.20	98.06	100.14
1.5	99.36	100.03	100.99	102.36	104.17
標準誤					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.0439	0.0438	0.0454	0.0482	0.0476
0.8	0.0452	0.0453	0.0472	0.0485	0.0500
1.0	0.0473	0.0473	0.0489	0.0495	0.0501
1.2	0.0484	0.0491	0.0494	0.0507	0.0519
1.5	0.0516	0.0519	0.0515	0.0533	0.0541

從以上表格可看出，不管是單獨使用控制變數、同時使用控制變數、商品使用反向變異法或是商品和控制變數同時使用反向變異法，其標準誤大多介於 0.04~0.05 之間，亦即，在 95%信心水準之下，我們預期誤差不超過 0.1%，而模擬出來的數值有效位數控制在小數點後第二位。

本研究針對 Quanto 與非 Quanto 商品做了成本上的分析。假設原商品不具有 Quanto 性質，但共變異數相同，其他條件都相同的情況下，其商品成本：

表 47、多資產 EIA 商品的成本

估計的價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	80.54	83.92	87.41	90.91	94.41
0.8	83.15	84.08	87.41	90.91	94.41
1.0	86.45	86.47	87.61	90.91	94.41
1.2	89.75	89.75	89.82	91.15	94.41
1.5	94.70	94.70	94.70	94.74	95.40

表 48 列出原多資產 Quanto EIA 商品與一般多資產 EIA 商品(非 Quanto EIA 商品)成本上的差距，以百分比表示，算法為：

$$\frac{\text{原多資產 Quanto EIA 商品價格} - \text{一般多資產 EIA 商品價格}}{\text{原多資產 Quanto EIA 商品價格}}$$

表 48、多資產 Quanto EIA 商品與一般多資產 EIA 商品 (非 Quanto EIA 商品) 成本上的差距

Participation α	Floor rate F_g (per year)				
	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	4.09%	2.62%	1.59%	0.95%	0.57%
0.8	4.45%	5.17%	3.72%	2.55%	1.74%
1.0	4.36%	5.65%	6.14%	4.73%	3.50%
1.2	4.44%	5.45%	6.72%	7.01%	5.67%
1.5	4.72%	5.42%	6.39%	7.57%	8.38%

表中數字可看出本個案 Quanto 的商品比非 Quanto 的商品來還的貴，因此，若發行商發行的商品為本個案的 Quanto 商品，但卻未明確告知投資人，且發行商

用非 Quanto 的模型來評價商品價格，則會低估發行成本。

接下來，針對多資產 Quanto EIA 商品股票與匯率的相關係數做調整。本研究先將商品、 C_1^+ 和 C_2^+ 做反向變異後，再將六檔股票與匯率的相關係數同時乘上 -3、-2、-1、0、1、2、3 倍，觀察商品的成本，以下為相關係數調整-3、-2、-1、0、1、2、3 倍的表格。

表 49、股價與匯率相關係數乘上-3、-2、-1、0、1、2、3 倍的商品成本

$\rho_{i,c}$ 乘上-3 倍的商品估計價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	84.19	86.25	88.83	91.75	94.90
0.8	87.61	89.08	91.07	93.48	96.19
1.0	91.39	92.47	94.01	95.96	98.27
1.2	95.34	96.17	97.39	98.98	100.91
1.5	101.42	102.04	102.93	104.14	105.65
$\rho_{i,c}$ 乘上-2 倍的商品估計價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	84.12	86.22	88.83	91.77	94.92
0.8	87.42	88.94	90.97	93.42	96.17
1.0	91.08	92.21	93.79	95.80	98.14
1.2	94.91	95.78	97.04	98.69	100.66
1.5	100.81	101.46	102.39	103.64	105.19
$\rho_{i,c}$ 乘上-1 倍的商品估計價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	84.04	86.18	88.81	91.76	94.92
0.8	87.23	88.80	90.87	93.35	96.11
1.0	90.78	91.95	93.58	95.62	97.99
1.2	94.49	95.41	96.71	98.39	100.40
1.5	100.23	100.90	101.87	103.15	104.74
$\rho_{i,c}$ 乘上 0 倍的商品估計價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	84.00	86.17	88.82	91.77	94.93

0.8	87.10	88.72	90.82	93.32	96.09
1.0	90.55	91.77	93.45	95.51	97.90
1.2	94.16	95.13	96.47	98.19	100.22
1.5	99.76	100.46	101.47	102.79	104.40
$\rho_{i,c}$ 乘上 1 倍的商品估計價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.94	86.15	88.81	91.78	94.94
0.8	86.94	88.61	90.76	93.27	96.06
1.0	90.28	91.56	93.28	95.38	97.80
1.2	93.78	94.80	96.20	97.95	100.02
1.5	99.23	99.96	101.02	102.38	104.02
$\rho_{i,c}$ 乘上 2 倍的商品估計價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.90	86.15	88.82	91.79	94.95
0.8	86.81	88.53	90.71	93.25	96.05
1.0	90.04	91.38	93.15	95.30	97.73
1.2	93.45	94.51	95.95	97.76	99.88
1.5	98.75	99.51	100.61	102.01	103.71
$\rho_{i,c}$ 乘上 3 倍的商品估計價格					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.87	86.13	88.81	91.77	94.93
0.8	86.72	88.48	90.67	93.22	96.02
1.0	89.87	91.26	93.07	95.22	97.67
1.2	93.20	94.31	95.80	97.63	99.76
1.5	98.38	99.19	100.33	101.77	103.50

從此表可得知，當股票和匯率的相關係數越大，正相關時 Quanto 商品成本越低，若相關係數為負相關，則商品成本越高。表中 $\rho_{i,c}$ 乘上 1 倍為原本商品的估計價格，我們可計算調整了股票及匯率的相關係數後，與原本商品的差距。計算的方法如下：

$$\frac{\text{原多資產 Quanto EIA 商品價格} - \text{調整 } \rho_{i,c} \text{ 後多資產 Quanto EIA 商品價格}}{\text{原多資產 Quanto EIA 商品價格}}$$

表 50 為原商品與相關係數調整-3、-2、-1、0、1、2、3 倍後的商品差距百分比：

表 50、商品與相關係數調整-3、-2、-1、0、1、2、3 倍後的商品差距百分比

商品與 $\rho_{i,c}$ 乘上-3 倍後商品差距百分比					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	-0.30%	-0.12%	-0.02%	0.03%	0.04%
0.8	-0.78%	-0.53%	-0.34%	-0.22%	-0.14%
1.0	-1.24%	-1.00%	-0.78%	-0.60%	-0.47%
1.2	-1.66%	-1.45%	-1.24%	-1.05%	-0.89%
1.5	-2.21%	-2.08%	-1.89%	-1.72%	-1.56%
商品與 $\rho_{i,c}$ 乘上-2 倍後商品差距百分比					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	-0.21%	-0.08%	-0.02%	0.01%	0.02%
0.8	-0.55%	-0.38%	-0.24%	-0.16%	-0.11%
1.0	-0.89%	-0.71%	-0.55%	-0.43%	-0.34%
1.2	-1.20%	-1.04%	-0.88%	-0.75%	-0.64%
1.5	-1.60%	-1.49%	-1.35%	-1.23%	-1.13%
商品與 $\rho_{i,c}$ 乘上-1 倍後商品差距百分比					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	-0.12%	-0.03%	0.00%	0.02%	0.02%
0.8	-0.34%	-0.22%	-0.13%	-0.08%	-0.05%
1.0	-0.55%	-0.43%	-0.32%	-0.24%	-0.19%
1.2	-0.75%	-0.64%	-0.54%	-0.45%	-0.38%
1.5	-1.02%	-0.94%	-0.84%	-0.76%	-0.69%
商品與 $\rho_{i,c}$ 乘上 0 倍後商品差距百分比					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	-0.07%	-0.03%	0.00%	0.01%	0.01%
0.8	-0.18%	-0.13%	-0.07%	-0.05%	-0.03%
1.0	-0.30%	-0.23%	-0.18%	-0.13%	-0.10%
1.2	-0.40%	-0.35%	-0.29%	-0.24%	-0.20%
1.5	-0.53%	-0.50%	-0.45%	-0.40%	-0.36%
1.5	-0.07%	-0.03%	0.00%	0.01%	0.01%
商品與 $\rho_{i,c}$ 乘上 2 倍後商品差距百分比					

α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.04%	0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%
0.8	0.15%	0.09%	0.05%	0.03%	0.01%
1.0	0.26%	0.20%	0.14%	0.09%	0.07%
1.2	0.36%	0.31%	0.25%	0.19%	0.15%
1.5	0.48%	0.45%	0.41%	0.35%	0.30%
商品與 $\rho_{i,c}$ 乘上 3 倍後商品差距百分比					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.07%	0.02%	0.01%	0.01%	0.01%
0.8	0.26%	0.14%	0.09%	0.06%	0.05%
1.0	0.45%	0.32%	0.23%	0.17%	0.13%
1.2	0.62%	0.52%	0.41%	0.32%	0.26%
1.5	0.85%	0.77%	0.69%	0.59%	0.50%

表 50 將商品成本的差距量化，從數據中可發現，若為負相關（相關係數為負數），商品成本的變化幅度比相關係數為正數的價格變化來的大，所以，發行商除了針對參與率和保證率做調整吸引投資人外，必須考慮到連結標的與匯率間相關係數所帶來成本差異的影響。

接著，我們針對利率來做敏感度分析。首先我們先調整澳幣利率（ $r = 5.96\%$ ），調整的方式為將原始的利率往上和往下的平行移動，間距為 1 碼（0.25%），亦即將 r 往上和往下平行移動 $\pm 0.25\%$ 、 $\pm 0.5\%$ 、 $\pm 0.75\%$ 、 $\pm 1\%$ 。

表 51 為澳幣利率調整後的商品價格：

表 51、澳幣利率調整 $\pm 0.25\%$ 、 $\pm 0.5\%$ 、 $\pm 0.75\%$ 、 $\pm 1\%$ 後的商品價格

$r - 1\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	89.13	91.48	94.31	97.45	100.81
0.8	92.32	94.09	96.37	99.04	102.00
1.0	95.86	97.22	99.05	101.28	103.85
1.2	99.58	100.66	102.14	104.01	106.21
1.5	105.36	106.15	107.27	108.71	110.45
$r - 0.75\%$					

α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	87.80	90.12	92.90	96.00	99.31
0.8	90.94	92.68	94.93	97.57	100.48
1.0	94.43	95.77	97.57	99.77	102.30
1.2	98.10	99.16	100.62	102.46	104.63
1.5	103.79	104.57	105.67	107.09	108.81
<i>r</i> - 0.5%					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	86.49	88.77	91.52	94.57	97.83
0.8	89.59	91.30	93.52	96.12	98.99
1.0	93.02	94.34	96.12	98.29	100.78
1.2	96.64	97.68	99.12	100.93	103.07
1.5	102.25	103.01	104.10	105.49	107.19
<i>r</i> - 0.25%					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	85.20	87.45	90.16	93.16	96.37
0.8	88.25	89.95	92.13	94.68	97.51
1.0	91.64	92.94	94.69	96.83	99.28
1.2	95.20	96.23	97.65	99.43	101.53
1.5	100.73	101.48	102.55	103.92	105.59
<i>r</i> - 0%					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.94	86.15	88.81	91.78	94.94
0.8	86.94	88.61	90.76	93.27	96.06
1.0	90.28	91.56	93.28	95.38	97.80
1.2	93.78	94.80	96.20	97.95	100.02
1.5	99.23	99.96	101.02	102.38	104.02
<i>r</i> + 0.25%					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	82.69	84.87	87.49	90.41	93.53
0.8	85.64	87.29	89.40	91.89	94.63
1.0	88.93	90.19	91.89	93.96	96.35
1.2	92.39	93.39	94.76	96.49	98.53
1.5	97.75	98.48	99.52	100.85	102.47
<i>r</i> + 0.5%					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	81.46	83.60	86.19	89.06	92.13

0.8	84.37	85.99	88.07	90.52	93.22
1.0	87.61	88.85	90.52	92.57	94.91
1.2	91.01	92.00	93.35	95.05	97.07
1.5	96.29	97.01	98.03	99.35	100.95
<i>r</i> + 0.75%					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	80.24	82.36	84.91	87.74	90.76
0.8	83.11	84.71	86.76	89.17	91.84
1.0	86.30	87.53	89.17	91.19	93.50
1.2	89.66	90.63	91.96	93.64	95.62
1.5	94.86	95.57	96.57	97.87	99.45
<i>r</i> + 1%					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	79.05	81.13	83.64	86.43	89.41
0.8	81.88	83.45	85.47	87.84	90.47
1.0	85.02	86.22	87.85	89.83	92.11
1.2	88.32	89.28	90.59	92.24	94.20
1.5	93.45	94.14	95.14	96.41	97.96

接下來，我們透過此公式：

$$\frac{\text{多資產Quanto EIA商品價格} - \text{調整}r\text{後多資產Quanto EIA商品價格}}{\text{多資產Quanto EIA商品價格}}$$

計算 B 商品與調整過利率後的商品價格的差距。表 52 為表 51 的價格差距百分比。

表 52、商品與澳幣利率調整 $\pm 0.25\%$ 、 $\pm 0.5\%$ 、 $\pm 0.75\%$ 、 $\pm 1\%$ 後的商品價格差距百分比

<i>r</i> - 1%					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	-6.18%	-6.18%	-6.18%	-6.18%	-6.18%
0.8	-6.18%	-6.18%	-6.18%	-6.18%	-6.18%
1.0	-6.18%	-6.18%	-6.18%	-6.18%	-6.18%
1.2	-6.18%	-6.18%	-6.18%	-6.18%	-6.18%
1.5	-6.18%	-6.18%	-6.18%	-6.18%	-6.18%
<i>r</i> - 0.75%					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%

0.6	-4.60%	-4.60%	-4.60%	-4.60%	-4.60%
0.8	-4.60%	-4.60%	-4.60%	-4.60%	-4.60%
1.0	-4.60%	-4.60%	-4.60%	-4.60%	-4.60%
1.2	-4.60%	-4.60%	-4.60%	-4.60%	-4.60%
1.5	-4.60%	-4.60%	-4.60%	-4.60%	-4.60%
<i>r</i> - 0.5%					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	-3.05%	-3.05%	-3.05%	-3.05%	-3.05%
0.8	-3.05%	-3.05%	-3.05%	-3.05%	-3.05%
1.0	-3.05%	-3.05%	-3.05%	-3.05%	-3.05%
1.2	-3.05%	-3.05%	-3.05%	-3.05%	-3.05%
1.5	-3.05%	-3.05%	-3.05%	-3.05%	-3.05%
<i>r</i> - 0.25%					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	-1.51%	-1.51%	-1.51%	-1.51%	-1.51%
0.8	-1.51%	-1.51%	-1.51%	-1.51%	-1.51%
1.0	-1.51%	-1.51%	-1.51%	-1.51%	-1.51%
1.2	-1.51%	-1.51%	-1.51%	-1.51%	-1.51%
1.5	-1.51%	-1.51%	-1.51%	-1.51%	-1.51%
<i>r</i> + 0.25%					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	1.49%	1.49%	1.49%	1.49%	1.49%
0.8	1.49%	1.49%	1.49%	1.49%	1.49%
1.0	1.49%	1.49%	1.49%	1.49%	1.49%
1.2	1.49%	1.49%	1.49%	1.49%	1.49%
1.5	1.49%	1.49%	1.49%	1.49%	1.49%
<i>r</i> + 0.5%					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	2.96%	2.96%	2.96%	2.96%	2.96%
0.8	2.96%	2.96%	2.96%	2.96%	2.96%
1.0	2.96%	2.96%	2.96%	2.96%	2.96%
1.2	2.96%	2.96%	2.96%	2.96%	2.96%
1.5	2.96%	2.96%	2.96%	2.96%	2.96%
<i>r</i> + 0.75%					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	4.40%	4.40%	4.40%	4.40%	4.40%
0.8	4.40%	4.40%	4.40%	4.40%	4.40%

1.0	4.40%	4.40%	4.40%	4.40%	4.40%
1.2	4.40%	4.40%	4.40%	4.40%	4.40%
1.5	4.40%	4.40%	4.40%	4.40%	4.40%
$r + 1\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	5.82%	5.82%	5.82%	5.82%	5.82%
0.8	5.82%	5.82%	5.82%	5.82%	5.82%
1.0	5.82%	5.82%	5.82%	5.82%	5.82%
1.2	5.82%	5.82%	5.82%	5.82%	5.82%
1.5	5.82%	5.82%	5.82%	5.82%	5.82%

從表 52 中數據可看出，當澳幣利率越高，商品的價格會越低，相反的，當澳幣利率越低，商品的價格會變高，亦即成本上升。此關係可由數學算算式中得出，由於澳幣利率在計算商品價格時扮演折現的角色，因此，當利率越大，代表折現因子越小，所求出的期初商品價格也就越便宜，反之亦然。從參與率和保證率這兩個維度來看，改變澳幣利率造成的商品價格變動，不論是固定參與率或是保證率，都不會因澳幣利率變動而有所改變。另外，由於模擬商品價值時，固定了隨機變數 Z ， $Z \sim N(0,1)$ ，因此變動的百分比是一致的。

再來，我們也針對外國（美國）利率（ $r_f = 4.7\%$ ）作調整，調整方式與調整澳幣利率方式相同，也就是將原始的利率往上和往下的平行移動 $\pm 0.25\%$ 、 $\pm 0.5\%$ 、 $\pm 0.75\%$ 、 $\pm 1\%$ 。下表為外國利率調整後的商品價格：

表 53、外國利率調整 $\pm 0.25\%$ 、 $\pm 0.5\%$ 、 $\pm 0.75\%$ 、 $\pm 1\%$ 後的商品價格

$r_f - 1\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.33	85.71	88.50	91.56	94.80
0.8	85.95	87.79	90.11	92.77	95.68
1.0	88.91	90.36	92.26	94.53	97.10
1.2	92.06	93.23	94.80	96.72	98.97
1.5	96.98	97.85	99.05	100.58	102.40

$r_f - 0.75\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.47	85.81	88.57	91.61	94.83
0.8	86.19	87.98	90.26	92.89	95.77
1.0	89.24	90.65	92.50	94.73	97.27
1.2	92.48	93.60	95.13	97.01	99.21
1.5	97.52	98.36	99.52	101.01	102.78
$r_f - 0.5\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.62	85.92	88.65	91.66	94.86
0.8	86.43	88.18	90.42	93.01	95.86
1.0	89.58	90.94	92.75	94.94	97.44
1.2	92.90	93.99	95.47	97.31	99.47
1.5	98.08	98.88	100.01	101.45	103.18
$r_f - 0.25\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.78	86.03	88.73	91.72	94.90
0.8	86.68	88.39	90.59	93.14	95.96
1.0	89.93	91.25	93.01	95.16	97.62
1.2	93.35	94.39	95.83	97.63	99.74
1.5	98.65	99.42	100.51	101.91	103.60
$r_f - 0\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	83.94	86.15	88.81	91.78	94.94
0.8	86.94	88.61	90.76	93.27	96.06
1.0	90.28	91.56	93.28	95.38	97.80
1.2	93.78	94.80	96.20	97.95	100.02
1.5	99.23	99.96	101.02	102.38	104.02
$r_f + 0.25\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	84.10	86.28	88.90	91.84	94.98
0.8	87.21	88.83	90.94	93.42	96.17

1.0	90.64	91.88	93.56	95.62	98.00
1.2	94.24	95.22	96.57	98.29	100.32
1.5	99.82	100.52	101.54	102.86	104.47
$r_f + 0.5\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	84.28	86.41	89.00	91.91	95.03
0.8	87.48	89.06	91.13	93.57	96.29
1.0	91.01	92.21	93.85	95.87	98.21
1.2	94.70	95.65	96.96	98.64	100.62
1.5	100.41	101.10	102.08	103.36	104.93
$r_f + 0.75\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	84.46	86.55	89.10	91.98	95.08
0.8	87.77	89.31	91.32	93.72	96.42
1.0	91.40	92.56	94.15	96.13	98.42
1.2	95.19	96.10	97.37	99.00	100.94
1.5	101.05	101.70	102.64	103.88	105.41
$r_f + 1\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	84.65	86.69	89.21	92.05	95.13
0.8	88.06	89.56	91.53	93.89	96.55
1.0	91.79	92.92	94.46	96.40	98.65
1.2	95.68	96.56	97.79	99.38	101.27
1.5	101.68	102.31	103.22	104.42	105.90

接著，我們計算 B 商品與調整過外幣利率後的商品價格的差距，方法同上。

表 54 為表 53 商品價格差距百分比。

表 54、商品與外國利率調整±0.25%、±0.5%、±0.75%、±1%後的商品價格差距百分比

$r_f - 1\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.73%	0.52%	0.35%	0.23%	0.15%
0.8	1.14%	0.92%	0.71%	0.54%	0.40%
1.0	1.51%	1.30%	1.09%	0.89%	0.71%
1.2	1.83%	1.65%	1.45%	1.25%	1.05%
1.5	2.27%	2.11%	1.95%	1.76%	1.56%
$r_f - 0.75\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.56%	0.40%	0.27%	0.18%	0.12%
0.8	0.87%	0.70%	0.55%	0.42%	0.31%
1.0	1.15%	0.99%	0.84%	0.68%	0.55%
1.2	1.39%	1.26%	1.11%	0.96%	0.81%
1.5	1.72%	1.60%	1.48%	1.34%	1.19%
$r_f - 0.5\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.38%	0.27%	0.19%	0.12%	0.08%
0.8	0.59%	0.48%	0.37%	0.28%	0.21%
1.0	0.77%	0.67%	0.57%	0.46%	0.37%
1.2	0.94%	0.85%	0.75%	0.65%	0.55%
1.5	1.16%	1.08%	1.00%	0.90%	0.81%
$r_f - 0.25\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	0.19%	0.14%	0.10%	0.06%	0.04%
0.8	0.29%	0.24%	0.19%	0.14%	0.11%
1.0	0.39%	0.34%	0.28%	0.23%	0.19%
1.2	0.47%	0.43%	0.38%	0.33%	0.28%
1.5	0.58%	0.54%	0.50%	0.45%	0.41%
$r_f + 0.25\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%

0.6	-0.20%	-0.15%	-0.10%	-0.07%	-0.05%
0.8	-0.31%	-0.25%	-0.20%	-0.15%	-0.12%
1.0	-0.40%	-0.35%	-0.30%	-0.25%	-0.20%
1.2	-0.48%	-0.44%	-0.39%	-0.34%	-0.29%
1.5	-0.59%	-0.56%	-0.52%	-0.47%	-0.43%
$r_f + 0.5\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	-0.41%	-0.30%	-0.21%	-0.14%	-0.09%
0.8	-0.62%	-0.52%	-0.41%	-0.31%	-0.24%
1.0	-0.81%	-0.72%	-0.61%	-0.51%	-0.41%
1.2	-0.98%	-0.90%	-0.80%	-0.70%	-0.60%
1.5	-1.20%	-1.13%	-1.05%	-0.96%	-0.87%
$r_f + 0.75\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	-0.62%	-0.46%	-0.32%	-0.22%	-0.15%
0.8	-0.95%	-0.79%	-0.62%	-0.48%	-0.37%
1.0	-1.24%	-1.10%	-0.94%	-0.78%	-0.64%
1.2	-1.50%	-1.37%	-1.22%	-1.07%	-0.92%
1.5	-1.83%	-1.73%	-1.61%	-1.47%	-1.33%
$r_f + 1\%$					
α / F_g	15%	20%	25%	30%	35%
0.6	-0.85%	-0.63%	-0.44%	-0.30%	-0.20%
0.8	-1.29%	-1.07%	-0.85%	-0.66%	-0.50%
1.0	-1.68%	-1.49%	-1.27%	-1.06%	-0.87%
1.2	-2.03%	-1.86%	-1.66%	-1.46%	-1.25%
1.5	-2.48%	-2.34%	-2.17%	-2.00%	-1.80%

從數字中看出當外國利率越大，商品價格越高，而外國利率越小，則商品價格越便宜。表 52 與表 54 相較之下，可發現改變本國利率（此處的本國利率在本 Quanto 模型下，指的是澳幣利率）造成的商品成本變動大於改變外國利率所帶來的成本變化，因此，發行商在發行商品時，本國利率的變動，也是一個需要注意的重要因子。接著，固定參與率這個維度，當保證率越高，受到外幣利率變

動的影響較小。從保證率這個維度來看，參與率越高時，受到外幣利率變動影響愈大。

