

國立政治大學統計學系

碩士學位論文

指導教授 劉惠美博士

不同單因子結構模型下  
合成型擔保債權憑證定價之研究

Comparison between different  
one-factor copula models of synthetic CDOs pricing

研究生 黃繼緯 撰

民國一〇二年六月

## 摘要

1990 年代中期信用衍生信商品開始發展，隨著時代變遷，演化出信用違約交換(Credit Default Swaps, CDS)、擔保債權憑證(Collateralized Debt Obligation, CDO)、合成型擔保債權憑證(Synthetic CDO)等商品，其可以分散風險的特性廣受歡迎，並且成為完備金融市場中重要的一環。在 2007 年金融海嘯中，信用衍生性商品扮演相當關鍵的角色，所以如何合理定價各類信用衍生性商品就變成相當重要的議題

以往在定價合成型擔保債權憑證時，多採取單因子結構模型來做為報酬函數的主要架構，並假設模型分配為常態分配、t 分配、NIG 分配等，但單因子結構模型的隱含相關係數具有波動性微笑現象，所以容易造成定價偏誤。

為了解決此問題，本文將引用常態分配假設與 NIG 分配假設下的隨機風險因子負荷模型(Random Factor Loading Model)，觀察隨機風險因子負荷模型是否對於定價偏誤較其他模型有所改善，並且比較各模型在最佳化參數與定價時的效率，藉此歸納出較佳的合成型擔保債權憑證定價模型。

# Abstract

During the mid-1990s, credit-derivatives began to be popular and evolved into credit default swaps (CDS), collateralized debt obligation (CDO), and synthetic collateralized debt obligation (Synthetic CDO). Because of the feature of risk sharing, credit-derivatives became an important part of financial market and played the key role in the financial crisis of 2007. So how to price credit-derivatives is a very important issue.

When pricing Synthetic CDO, most people use the one-factor coupla model as the structure of reward function, and suppose the distribution of model is Normal distribution, t- distribution or Normal Inverse Gaussian distribution(NIG). But the volatility smile of implied volatility always causes the pricing inaccurate.

For solving the problem, I use the random factor loading model under Normal distribution and NIG distribution in this study to test whether the random factor loading model is better than one-factor coupla model in pricing, and compare the efficiency of optimization parameters. In conclusion, I will induct the best model of Synthetic CDO pricing.

# 目錄

摘要.....	I
Abstract.....	II
第一章 緒論.....	1
第一節 研究動機.....	1
第二節 研究目的.....	2
第三節 擔保債權憑證.....	2
第四節 信用違約交換與CDS Index.....	3
第五節 合成型擔保債權憑證.....	4
第六節 論文架構.....	5
第二章 文獻回顧.....	6
第一節 單因子關聯結構.....	6
第二節 隨機風險因子負荷模型.....	8
第三節 Normal Inverse Gaussian Distribution.....	9
第三章 研究方法.....	10
第一節 合成型擔保債權憑證定價方式.....	10
第二節 單因子結構模型與LHP近似計算.....	13
第三節 NIG分配的特性與單因子結構NIG分配模型.....	17
第四節 單因子RFL結構模型.....	20
第四章 實證分析.....	23
第一節 DJ iTraxx Europe 指數.....	23
第二節 合成型CDO各分券定價.....	24
第五章 結論與建議.....	38
參考文獻.....	30

## 圖目錄

圖 1.1 擔保債權憑證架構圖.....	3
圖 1.2 信用違約交換架構圖.....	3
圖 1.3 合成型擔保債權憑證架構圖.....	4
圖 3.1 NIG 分配各參數影響圖.....	18
圖 4.1 2009 年損失函數累積機率.....	27
圖 4.2 2011 年損失函數累積機率.....	27

## 表目錄

表 4.1 DJ iTraxx Europe 市場報價.....	23
表 4.2 2009/3/31 市場定價與各模型定價結果.....	25
表 4.3 2011/9/11 市場定價與各模型定價結果.....	26



# 第一章 緒論

本章將說明研究動機與目的，並且介紹本文主要定價目標商品-合成型擔保債權憑證以及與其相關之其他衍生性商品，最後敘述本文架構。

## 第一節 研究動機

信用衍生性商品在 1990 年代中期開始蓬勃發展，其中包含了信用違約交換 (Credit Default Swaps)、擔保債權憑證(Collateralized Debt Obligation)、合成型擔保債權憑證(Synthetic CDO)等。對於金融市場而言，信用衍生性商品提供了金融機構類似保險的保障，當交易對手發生信用違約的時候，可以將風險轉移至金融市場中。此外，對於較私人且小型的資產或應收帳款如房屋貸款、商業貸款、甚至智慧財產權等，擔保債權憑證也增加了這類資產的流動性。在金融市場中，為了增加各類信用衍生性商品的流動性與透明性，制定了標準化契約的信用交換指數(Credit Default Swaps Index)，主要的信用交換指數有 iTraxx 指數及 CDX 指數，其中 iTraxx 指數也是本文實證分析的資料來源。

在美國次級房貸風暴中，以擔保債權憑證為主的信用衍生性商品扮演相當重要的腳色，由於大量的貸款違約，造成許多擔保債權憑證購買者鉅額損失，甚至破產。在此事件過後，擔保債權憑證的結構與價格產生了相當大的改變，如何定價便是一個需要改進的問題。

本文著重於合成型擔保債權憑證的定價，並使用真實市場報價資料，探討各分配假設下的準確性與效率，藉此觀察定價是否合理。

## 第二節 研究目的

比較各種單因子關聯結構模型(One Factor Coupla Model)定價合成型擔保債權憑證的準確性及效率，其中包含因子分配假設為常態分配、NIG 分配(Normal Inverse Gaussian Distribution)、或因子假設為隨機風險因子負荷(Random Factor Loading)，藉此希望找出較合理的定價模型。

## 第三節 擔保債權憑證

擔保債權憑證(Collateralized Debt Obligation,CDO)為資產擔保證券(Asset-backed securities)的信用衍生性商品之一，其背後支持的資產有債券、貸款等。其運作過程包括：創始機構(如銀行)將其資產群組轉售給特殊目的機構(SPV)，之後 SPV 將其重新包裝後再賣出固定收益證券或是受益憑證。CDO 的特色之一就是將受益證券分層，下段舉例說明 CDO 各分層收益方式。

假設現在 SPV 發行了期限為五年的 CDO，其中包含 100 家不同公司的債券且每張債券市值一百萬，而其息票(coupon)為債券票面價值的 100bp (basis points)，該 CDO 的受益證券分層為，權益層級(Equity Tranche)(0%~3%)、次順位層級(Junior Tranche)(3%~6%)、中間順位層級(Mezzanine Tranche)(6%~9%)、高順位層級(Senior Tranche)(9%~12%)、最優先順位層級(Super Senior Tranche)(12%~22%)。

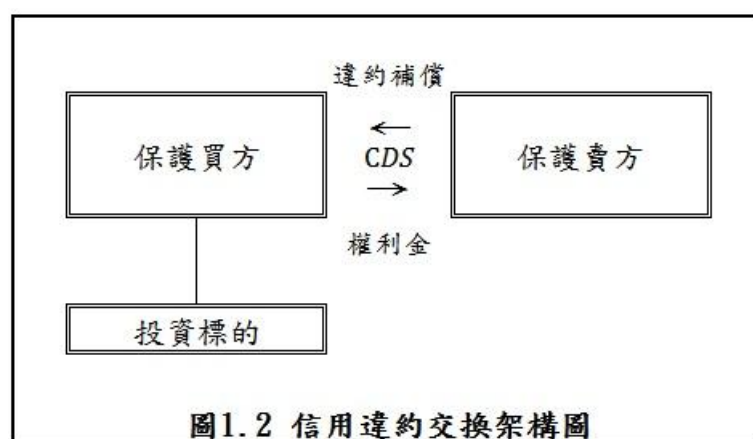
在不收取交易費用的情形下，若是在結算日時並沒有任何債券違約，則各層分券將收取其投資額應收的息票比例，順序為最優先、高順位、依此類推最後為權益層級。假如有一家廠商違約了，則資產組合損失的 1%將由權益層級承擔，權益層級原本投入的三百萬元將損失三分之一，其息票收入也將依照損失比例減少；若是現在有三間廠商違約，則權益層級將損失原本投入的三百萬，當損失更大的時候將由下一個層級來負擔，依此類推，當損失超過 12%時就是由最優先順

位層級負擔。由於權益層級風險最高，所以其應收的息票比例也會較高，下圖 1.1 為 CDO 的結構關係圖。



#### 第四節 信用違約交換與 CDS Index

信用違約交換(Credit Default Swaps, CDS)為最基礎的信用衍生信商品，其精神在於持有資產的一方擔心投資標的(如貸款)違約，而尋求風險轉移。在 CDS 中，持有資產且尋求風險轉移的一方稱作保護買方(Protection Buyer)，而購買此 CDS 的另一方稱作保護賣方(Protection Seller)，在 CDS 合約期內，保護買方需定期支付權利金(Spread)做為轉移風險的補償，若是在合約期內發生投資標的違約事件時，保護賣方需給予一筆補償金額作為違約的補償，其架構圖如下圖 1.2。





CDS Index 是將數個 CDS 合約組合而成的定製化商品，其中包含的組合通常為市場流動性較高的企業之 CDS，將此資產組合加權組合後計算其權利金。與 CDS 不同的地方在於，CDS 若是發生違約事件時，會立即停止給付權利金；相反地，CDS Index 會在合約期內持續支付權力金，但權利金依照剩餘本金比例減少，直到合約期滿。

目前市場上主要的 CDS Index 為 CDX 指數與 iTraxx。其中 CDX 指數主要組成企業大多位於北美或是新興市場；iTraxx 則是其他地區的企業，兩者皆是由 Markit 集團有限公司所發行。

## 第五節 合成型擔保債權憑證

合成型擔保債權憑證(Synthetic CDO)與一般 CDO 最大的不同在於資產轉移，合成型 CDO 並沒有真實的資產轉移，而是利用信用違約交換 CDS 與 SPV 交易，將風險轉移至 SPV，合成型 CDO 在這個 CDS 中扮演的角色是保護賣方，而創始機構是保護買方。而 SPV 在收到各分券投資人的現金與 CDS 的定期費用後，將其資金投入穩定的收益商品，預防違約事件的發生，其結構關係圖如下圖 1.3。目前金融市場中也將合成型 CDO 與 CDS Index 結合，將指數分割成不同層級的分券出售，此種合成型 CDO 也是本文所要討論的主要商品。

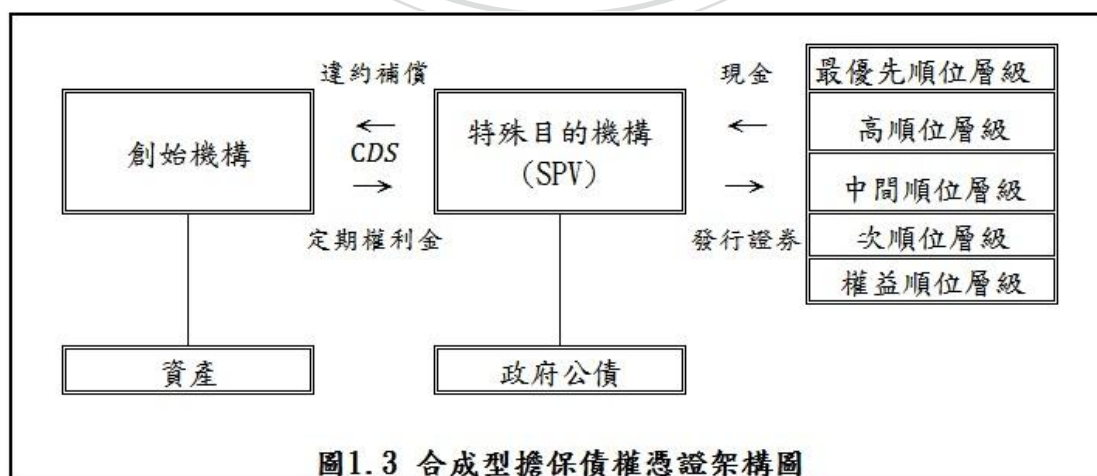


圖 1.3 合成型擔保債權憑證架構圖

## 第六節 論文架構

本篇論文架構如下：第二章回顧定價合成型 CDO 所需的單因子結構模型與其相關的論文；第三章介紹如何定價合成型 CDO 與 Large Homogenous Portfolio 假設下的單因子結構模型，另外介紹 NIG 分配(Normal Inverse Gaussian Distribution)與隨機風險因子負荷模型(Random Factor Loading Model)；第四章為實證分析，運用 iTraxx 市場報價資料比較各模型的準確性與效率，模型包括單因子常態分配結構模型、單因子 NIG 分配結構模型、常態分配與 NIG 分配假設下單因子隨機風險因子負荷模型；第五章為結論與建議。



## 第二章 文獻回顧

在定價合成型擔保債權憑證時，最重要的問題就是如何估計各信用資產間的違約相關性。在估計違約相關性方面，目前以關聯結構模型最受大家歡迎，其後也衍生出各種不同的關聯結構模型，如單因子關聯結構模型、隨機風險因子負荷模型、隨機回復率模型等；此外，在結構模型下各因子的分配也有許多不同的假設，較常見的為標準常態分配(Standard Normal Distribution)、t 分配(Student t Distribution)，或是 NIG 分配(Normal Inverse Gaussian Distribution)，而本文著重在單因子模型與隨機風險因子負荷模型在常態分配與 NIG 下的比較，以下將介紹各關聯結構及不同分配的特性。

### 第一節 單因子關聯結構

單因子關聯結構最初由 Li(2000)年提出，特色為給予投資組合中各信用資產相同的市場因子，且個別信用資產違約率彼此獨立，其優點在於，大量簡化在各時間點下估計資產組合損失所需的計算量。

在此結構模型假設下，假設個別信用資產的違約事件服從 Poisson Process(其母體參數為 $\lambda$ )，且彼此間相互獨立，若是共有  $N$  個信用資產，第  $i$  個信用資產在時間  $t$  之前的違約機率就會如下，

$$P(t_i \leq T) = 1 - \exp(-\lambda_i * t) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

而在單因子關聯結構下，當時間  $t$  時各資產的報酬函數  $A_i$  如下

$$A_i(t) = a_i M(t) + \sqrt{1 - a_i^2} X_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

其中  $M(t)$  為共同市場因子， $X_i(t)$  為各信用資產的風險因子。

O'Kane and Schloegl(2001)假設 $M(t)$ 與 $X_i(t)$ 皆為標準常態分配及相互獨立之下，可以推導出 $A_i(t)$ 也是服從標準常態分配之隨機變數，而 $A_i(t)$ 與 $A_j(t)$ 的相關係數為 $a_i a_j$ ；如果在給定共同市場因子 $M(t) = m$ 下，則 $A_i(t)$ 間將會彼此獨立，給定市場因子的好處是可以大量簡化資產組合報酬的計算。此外，在信用資產數量夠多的情況下，可以使用 Large Homogenous Portfolio(LHP)近似，對於每個信用資產  $i$ ，令 $A_i(t)$ 中的 $a_i = a$ 且 Poisson Process 的參數 $\lambda_i = \lambda$ ，在這樣的假設條件下，可以快速計算出違約機率，進而求得損失函數及 CDO 的期望損失。

由於單因子結構常態模型可以快速計算成型擔保債權憑證的定價，所以有大量相關研究，但此模型存在一個嚴重的缺點，就是在計算各分券的隱含相關(Implied Correlations)時，會出現與整體結構的隱含相關不同之情形。所謂隱含相關是指在定價擔保債權憑證時，若是各信用資產間的相關係數為  $a$ ，且  $a$  使得模型估計出來的特定分券定價與市場報價相同，則此相關係數就稱作此分券的隱含相關。舉例來說，假設現在 3%-6%分券定價為 65bp，當使用常態結構模型求出的價格等於 65bp 時，報酬函數  $A(t)$ 中所含的市場因子係數  $a$  就是 3%-6%分券的隱含相關係數。除了隱含相關還有另一種信用資產間的違約率相關稱作隱含基底相關(Base Implied Correlations)，因為此兩種隱含相關都具有偏斜(Skew)及厚尾(Fat-tails)的特性，所以在單因子常態關聯模型下，較高的分券層級定價通常會低於市場定價。

為了解決上述問題，許多學者提不同的看法，主要分成兩個方向，

1. 加入隨機風險因子負荷或是隨機回復率(將在第二節介紹)
2. 改變單因子關聯結構的市場因子與個別因子的常態假設

Hull and White(2004)使用  $t$  分配取代常態分配，形成 double  $t$ -distribution coupla，利用  $t$  分配厚尾的特性得到較佳的定價結果，但由於  $t$  分配並不具有穩

定摺積性(convolution)，所以造成計算投資組合損失分配時運算量大增，大量增加計算時間。為了解決這個情況，Kalemanova, Schmid and Werner(2007)使用了NIG分配(Normal Inverse Gaussian Distribution)取代常態分配，由於NIG分配共有四個參數，具有可以調整分配的偏斜及厚尾的特性，在定價上較為適合；另外，與t分配比較，NIG分配在特定條件下具有摺積性，可以大量減少計算時間。除此之外，邱熾燁(2007)提出利用CSN分配(Closed Skew Normal)進行定價且獲得不錯的效果；而林聖航(2012)更將其分配改良，使用CSN分配與NIG分配之混合分配，雖然在運算上變得耗時，但定價準確性更加上升，尤其是對於2007年金融海嘯後的資料，定價準確度都優於傳統定價模型。

## 第二節 隨機風險因子負荷模型

Andersen and Sidenius(2005)提出了隨機回復率模型(Random Recovery model)以及隨機風險因子負荷模型(Random Factor Loading model, RFL model)，這兩個隨機模型中，風險因子乘載模型不但效率較高，且此模型資產報酬間的相關係數，會跟隨市場因子大小調整，可以有效解決單因子常態模型缺少分配偏斜的缺點，在RFL模型下，t時間時各資產的報酬函數 $A_i$ 將改變為

$$A_i(t) = a_i(M)M(t) + vX_i(t) + \eta \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$a_i(M) = \begin{cases} a, & \text{if } M \leq \theta \\ b, & \text{if } M > \theta \end{cases}$$

其中 $a, b$ 是正數而 $\theta \in R$ 、 $M(t)$ 為市場因子、 $X_i(t)$ 為各信用資產的風險因子。

Wang and Huang(2009)為了解決單因子常態模型分配缺乏厚尾特性的問題，將RFL model中的常態分配改變成NIG分配，利用NIG分配可以調整厚尾及偏斜的特性，更加準確地定價合成型CDO。

### 第三節 Normal Inverse Gaussian Distribution

Barndorff-Nielsen(1987)提出 NIG 分配，NIG 分配為廣義雙曲分配的一種，其為常態分配與反高斯分配(Inverse Gaussian Distribution)合成之混和分配，特性是有四個母體參數可以調整，可依需求調整分配的平均數、變異數、偏態係數、峰態係數，且在特定的參數條件下具有穩定摺積性(convolution)，與 t 分配相比，可大量減少合成函數的計算量。

總結本章內容，單因子關聯結構模型是最早運用在合成型擔保債權憑證定價問題上之方法，但此模型在較高層分券定價準確性偏低。為了改善此問題，多數學者就常態分配缺乏厚尾與偏態的特性給予改進，主要分成因子隨機化或是改變分配假設兩種方向，而在改變分配假設中較常使用的為 t 分配或是 NIG 分配，但由於 t 分配缺乏穩定摺積性(convolution)，所以本文將不討論 t 分配相關的改善方法，後面的章節中會詳細介紹在單因子結構模型下如何定價。



## 第三章 研究方法

本章將會介紹如何定價合成型擔保債權憑證，並介紹在 LHP 假設下，單因子結構模型在常態分配與 NIG 分配下的定價公式推導，最後介紹在 NIG 分配之下 RFL 模型的定價方法。

### 第一節 合成型擔保債權憑證定價方式

在考慮合成型擔保債權憑證定價時，假設資產組合中僅包含信用違約交換的投資標的。若是在每次結算期限日時(通常是以一季為單位)，資產損失還未到達分券的票面價值時，保護買方(Protect seller)會給予其分券持有人，也就是保護賣方(Protect buyer)一筆固定信用價差(Credit spread)；相反地，要是在結算時，資產組合損失超過分券票面價值(也稱作信用資產違約)，則保護賣方需支付分券損失給保護買方。

在定價第  $K_1 \sim K_2$  分券 ( $0 \leq K_1 \leq K_2 \leq 1$ ) 價格時會使用與信用違約交換定價相同的方式，首先假設  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  為信用價差支付的時間，其中  $t_0$  為合成型 CDO 的定價日，而  $T$  為合成型 CDO 的到期日，為了簡化計算過程，若是合成型 COD 的違約時間在結算日  $t_{k-1}, t_k$  期間，則執行支付分券損失的時間為  $t_k$ 。

接下來介紹推導定價公式時所需的符號：

$s$ ：每期的信用價差

$fs$ ：固定信用價差費用(fixed spread)

$P$ ：與市場報價相等的預付費用

$L_{(k_1, k_2)}(t)$ ：分券  $K_1 \sim K_2$  在時間  $t$  時的損失比例

$r(t)$ ：短期無風險利率

$Q$ ：風險中立測度

$PL$ ：信用資產的名目本金

$E_Q[L_{(k_1, k_2)}(t)]$ ：風險中立測度下合成型 CDO 第  $K_1 \sim K_2$  分券期望損失(=  $EL_{(k_1, k_2)}(t)$ )

$D(t_0, t_i)$ ：將  $t_i$  時資產價值折現回  $t_0$  時資產價值之折現因子，其中無風險利率複利方式為連續複利(Continuous compounding)

在定價合成型 CDO 時，最重要的概念就是無套利機會(Arbitrage-free)，所以必須計算各分券的期望保護賣方收入(Premium leg)與期望違約給付金額(Protection leg)，為了簡化計算，所以在定價時均假設在風險中立測度之下。

首先先計算第  $K_1 \sim K_2$  分券的保護賣方期望收入折現值為

$$\begin{aligned} & (K_2 - K_1) \times PL \times s \times \sum_{i=1}^n \Delta t_i \times E_Q[(1 - L_{(k_1, k_2)}(t_i)) \times e^{-\int_{t_0}^{t_i} r(u) du}] \\ & = (K_2 - K_1) \times PL \times s \times \sum_{i=1}^n \Delta t_i \times (1 - EL_{(k_1, k_2)}(t_i)) \times D(t_0, t_i) \quad (3.1) \end{aligned}$$

其中  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ 。

此外還有另一種形式的定義方式常用於較低順位分券層級，保護賣方固定支付  $fs$  的信用價差，而市場報價為  $P$ ，則第  $K_1 \sim K_2$  分券的保護賣方期望收入折現值為

$$(K_2 - K_1) \times PL \times \left\{ P + fs \sum_{i=1}^n \Delta t_i \times E_Q[(1 - L_{(k_1, k_2)}(t_i))] \right\} \times D(t_0, t_i) \quad (3.2)$$

接下來計算第  $K_1 \sim K_2$  分券的期望違約給付金額折現值為

$$\begin{aligned} & (K_1 \sim K_2) \times PL \times E_Q \left[ \int_{t_0}^{t_i} e^{-\int_{t_0}^{t_i} r(u) du} dL_{(K_1, K_2)}(s) \right] \\ & \approx (K_1 \sim K_2) \times PL \times \sum_{i=1}^n (EL_{(k_1, k_2)}(t_i) - EL_{(k_1, k_2)}(t_{i-1})) \times D(t_0, t_i) \quad (3.3) \end{aligned}$$



在計算上述兩個期望值時，求得 $EL_{(k_1, k_2)}(t_i)$ 是最重要的部分，接下來就先介紹如何計算 $EL_{(k_1, k_2)}(t_i)$ 。

假設資產組合在時間點 $t_i$ 時損失為 $L_{portfolio}(t_i)$ ，則第 $K_1 \sim K_2$ 分券的損失為

$$L_{(k_1, k_2)}(t_i) = \frac{(\min(L_{portfolio}(t_i), k_2) - k_1)^+}{k_2 - k_1} \quad (3.4)$$

對其取期望值則可以得到期望損失為

$$\begin{aligned} EL_{(k_1, k_2)}(t_i) &= \frac{\int_{k_1}^1 (\min(x, k_2) - k_1) dF(t_i, x)}{k_2 - k_1} \\ &= \frac{\int_{k_1}^1 (x - k_1) dF(t_i, x) - \int_{k_2}^1 (x - k_2) dF(t_i, x)}{k_2 - k_1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

在得到期望損失 $EL_{(k_1, k_2)}(t)$ 後，將其帶入保護賣方期望收入與期望違約給付金額，在無套利機會之下，此兩項期望金額應該相等。(3.1)式中的每期信用價差 $s$ 即為市場定價的理論價格；而在另一種保護賣方期望收入(3.2)式中，由於信用價差為固定值，所以與市場報價相同的預付金額 $P$ 即為理論價格，兩者算式如下，

$$s = \frac{\sum_{i=1}^n (EL_{(k_1, k_2)}(t_i) - EL_{(k_1, k_2)}(t_{i-1})) \times D(t_0, t_i)}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i \times (1 - EL_{(k_1 - k_2)}(t_i)) \times D(t_0, t_i)} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^n (EL_{(k_1, k_2)}(t_i) - EL_{(k_1, k_2)}(t_{i-1})) \times D(t_0, t_i) - \\ &\quad fs \sum_{i=1}^n \Delta t_i \times E_Q[(1 - L_{(k_1 - k_2)}(t_i))] \times D(t_0, t_i) \end{aligned} \quad (3.7)$$

但在計算資產組合期望值時還有一個問題待解決，就是資產組合的損失分配應該為何種分配？為了解決此問題我們將在下節介紹單因子結構模型。

## 第二節 單因子結構模型與 LHP 近似計算

在信用資產組合中，第*i*個信用資產在時間*t*的報酬率函數為

$$A_i(t) = a_i M(t) + \sqrt{1 - a_i^2} X_i(t) \quad (3.8)$$

其中*M(t)*為共同市場因子，*X<sub>i</sub>(t)*為第*i*個信用資產的個別因子，個別因子間相互獨立，且市場因子與個別因子也相互獨立，兩者均符合標準常態分配 (Normal(0,1))，利用常態分配的線性組合特性，可以得到*A<sub>i</sub>(t)*亦為標準常態分配，而*a<sub>i</sub>a<sub>j</sub>*為*A<sub>i</sub>(t)*、*A<sub>j</sub>(t)*的相關係數，也就是個別資產報酬率間的相關係數。

假設當信用資產*i*報酬率*A<sub>i</sub>(t)*小於*C<sub>i</sub>(t)*時即為違約，則可以利用違約時間函數*q<sub>i</sub>(t)*與其做一對一的映射如下，

$$q_i(t) = P[t_i \leq t] = P[A_i(t) \leq C_i(t)] \quad (3.9)$$

*q<sub>i</sub>(t)*表示第*i*個資產於時間*t*之前違約的機率。一般情形下，*q<sub>i</sub>(t)*的機率分配皆假設為參數等於λ的指數分配，則*q<sub>i</sub>(t) = 1 - e<sup>-λt</sup>*。

利用上述關係式，可以得到違約門檻值*C<sub>i</sub>(t)*為

$$C_i(t) = \Phi^{-1}(q_i(t)) \quad (3.10)$$

其中Φ表示標準常態分配的機率分配函數。

當給定共同因子*M(t) = M*時，第*i*個信用資產在時間*t*時的違約機率為

$$\begin{aligned}
p_i(t|M) &= p_i(A_i(t) \leq C_i(t)|M) \\
&= p_i\left(X_i(t) \leq \frac{C_i(t) - a_i M(t)}{\sqrt{1 - a_i^2}} \middle| M\right) \\
&= \Phi_X\left(\frac{C_i(t) - a_i M(t)}{\sqrt{1 - a_i^2}}\right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

若假設此資產組合的個數  $N$  夠多，且各資產具有同質性，也就是市場共同因子係數  $a_i$  皆為  $a$ 、違約上限  $C_i(t)$  皆為  $C(t)$ 、回復率(recovery rate)  $R$  皆相同時，在此假設下的資產組合稱作 LHP(large homogeneous portfolio)。

為了簡化推導過程，我們將假設資產組合為 LHP 且回復率  $R$  等於零，當  $t$  時間時，若資產組合共有  $K$  個信用資產違約，則資產組合的損失百分比為  $L(t) = \frac{K}{N}$ ，其機率為二項分配如下，

$$P\left[L(t) = \frac{K}{N} \middle| M(t)\right] = \binom{N}{K} \Phi_X\left(\frac{C(t) - aM(t)}{\sqrt{1 - a^2}}\right)^K \left(1 - \Phi_X\left(\frac{C(t) - aM(t)}{\sqrt{1 - a^2}}\right)\right)^{N-K} \tag{3.12}$$

得到其二項分配的機率密度函數後，需要更進一步將條件機率推廣成一般非條件機率的情形，所以我們將(3.12)式對  $M(t)$  積分得到下式，

$$P[L(t) = \frac{K}{N}] = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{N}{K} \Phi_X\left(\frac{C(t) - aM(t)}{\sqrt{1 - a^2}}\right)^K \left(1 - \Phi_X\left(\frac{C(t) - aM(t)}{\sqrt{1 - a^2}}\right)\right)^{N-K} d\Phi_M(t) \tag{3.13}$$

由於上式(3.13)在計算上非常的複雜，所以在此利用 Vasicek (2002) 所推導出的 LHP 近似去估計(3.13)。首先假設一個新的變數  $g$  如下

$$g = \Phi_X \left( \frac{C(t) - au}{\sqrt{1 - a^2}} \right)$$

則(3.13)改用變數 $g$ 表示後如下

$$F_N(t, x) = - \int_0^1 \sum_{K=0}^{[Nx]} \binom{N}{K} g^K (1-g)^{N-K} d\Phi_M \left( \frac{c(t) - \sqrt{1-a^2} \Phi_X^{-1}(g)}{a} \right) \quad (3.14)$$

由於先前已假設此資產組合為 LHP，當  $N$  夠大的時候可以近似由無窮多項信用資產所形成的資產組合，故現在考慮  $N \rightarrow \infty$  時損失百分比的機率分配為

$$F_\infty(t, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ - \int_0^1 \sum_{K=0}^{[Nx]} \binom{N}{K} g^K (1-g)^{N-K} d\Phi_M \left( \frac{c(t) - \sqrt{1-a^2} \Phi_X^{-1}(g)}{a} \right) \right] \quad (3.15)$$

此外因為

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{[Nx]} \binom{N}{K} g^K (1-g)^{N-K} = \begin{cases} 0, & \text{if } x < g \\ 1, & \text{if } x > g \end{cases}$$

所以(3.15)可寫成

$$\begin{aligned} F_\infty(t, x) &= - \int_0^x d\Phi_M \left( \frac{c(t) - \sqrt{1-a^2} \Phi_X^{-1}(g)}{a} \right) \\ &= 1 - \Phi_M \left( \frac{c(t) - \sqrt{1-a^2} \Phi_X^{-1}(x)}{a} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

在得到 $F_\infty(t, x)$ 後，帶入(3.5)式，第 $K_1 \sim K_2$ 分券的期望損失即可以快速地算出，底下再將(3.5)式改寫，

$$\begin{aligned}
EL_{(k_1, k_2)}(t) &= \frac{\int_{k_1}^1 (x - k_1) dF_{\infty}(t, x) - \int_{k_2}^1 (x - k_2) dF_{\infty}(t, x)}{k_2 - k_1} \\
&= \frac{\int_{k_1}^{k_2} (x - k_1) dF_{\infty}(t, x)}{k_2 - k_1} + (1 - F_{\infty}(t, x)) \quad (3.17)
\end{aligned}$$

在一般的情況下，上式(3.17)已經提供了計算期望分券損失的方法，但當個別因子 $X_i$ 並非服從常態分配而是更加複雜的分配如 NIG 分配時，(3.17)中的積分式會需要大量的反函數運算，導致運算時間大量增加。為了解決這個問題，可以先做一次變數變換如下

$$w = \Phi_X^{-1}(x)$$

則

$$\begin{aligned}
\int_{k_1}^{k_2} (x - k_1) dF_{\infty}(t, x) &= \int_{\Phi_X^{-1}(k_1)}^{\Phi_X^{-1}(k_2)} (\Phi_X(w) - k_1) d\Phi_M\left(\frac{\sqrt{1-a^2}w - c(t)}{a}\right) \\
&= \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \int_{\Phi_X^{-1}(k_1)}^{\Phi_X^{-1}(k_2)} (\Phi_X(w) - k_1) f_M\left(\frac{\sqrt{1-a^2}w - c(t)}{a}\right) dw \quad (3.18)
\end{aligned}$$

以上為回復率等於零時第 $K_1 \sim K_2$ 分券的期望損失推導，若是回復率不等於零時，則只需要利用簡單的關係式如下就可以得到期望損失，假設回復率等於 $R$ ，

$$EL^R_{(k_1, k_2)}(t) = EL_{\left(\frac{k_1}{1-R}, \frac{k_2}{1-R}\right)}(t) \quad (3.19)$$

本節推導的單因子結構模型都是在假設共同因子與個別因子皆為標準常態的情況下，假設此兩種因子都不為常態分配時，只要保持資產組合報酬率分配函數的平均數為零且變異數為一時，則本節推導出的各方程式依舊適用，僅需將分配函數及機率密度函數替換為所需分配(如 NIG 分配)之函數即可。

### 第三節 NIG 分配的特性與單因子結構 NIG 分配模型

NIG 分配是由常態分配與反高斯分配(Inverse Gaussian Distribution)所形成的混和分配。假設隨機變數 $Y$ 服從反高斯分配，則其機率密度函數如下

$$f_{Ig}(y; \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\beta}} y^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(\alpha - \beta y)^2}{2\beta y}\right), \text{ if } y > 0 \quad (3.20)$$

其中參數 $\alpha, \beta$ 都大於零，可記為 $Y \sim Ig(\alpha, \beta)$ 。

若隨機變數 $X$ 符合參數為 $\alpha, \beta, \mu, \delta$ 的 NIG 分配，則記為 $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ 。而 NIG 分配所表示的意義為，當隨機變數 $Y$ 符合反高斯分配時，在給定 $Y=y$ 的情形下， $X$ 的條件機率會是常態分配，其關係式表示如下，

$$X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta) \text{ if } X|Y = y \sim N(\mu + \beta y, y)$$

其中 $Y \sim Ig(\alpha, \beta)$ 且 $0 \leq |\beta| \leq \alpha$ 、 $\delta > 0$ ，另外定義 $\gamma := \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ 。而 NIG 分配的機率密度函數如下

$$f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{\delta \alpha \times \exp(\delta \gamma + \beta(x - \mu))}{\pi \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} K_1\left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right) \quad (3.21)$$

$$\text{其中 } K_1(l) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}(l)(t + t^{-1})\right) dt$$

分配所包含的四個參數依序控制厚尾特性(tail heavyness)、對稱性(asymmetry)、位置特性(location)、尺度特性(scale)，可依需求調整分配特性。下圖 3.1 舉例各參數對於分配的影響，其中 Standard 圖形之分配為 $NIG(1,0,0,1)$ ，依序對於 NIG 分配中各參數做調整。

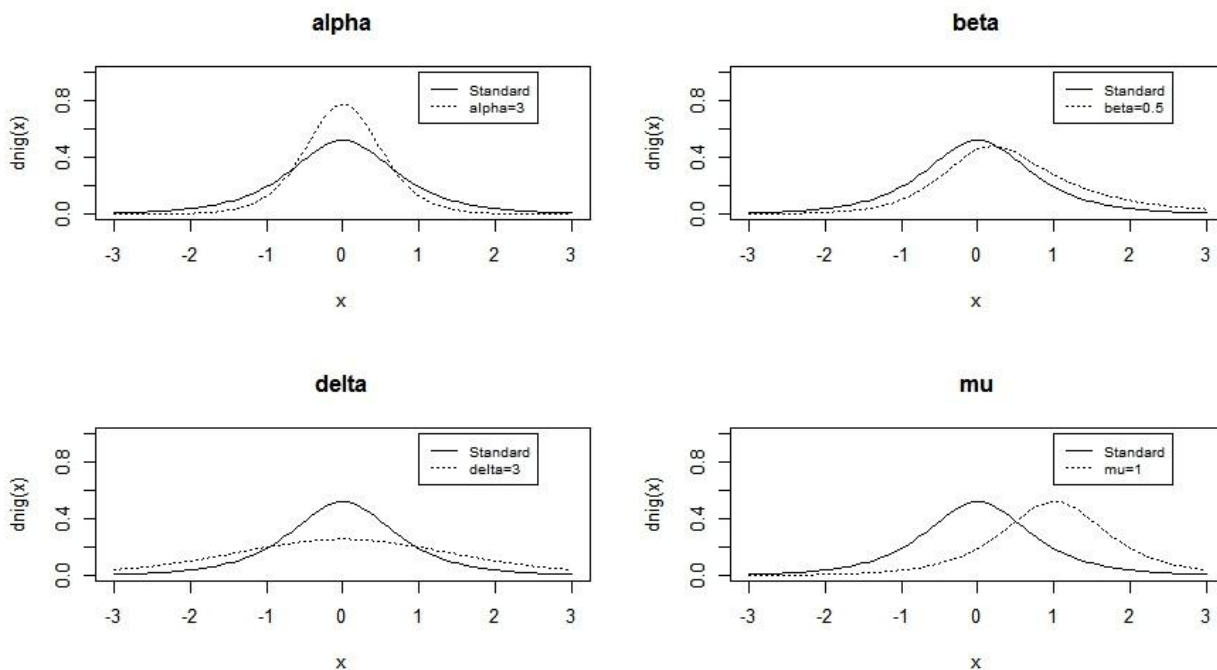


圖 3.1 NIG 分配各參數影響圖

另外 NIG 分配還有很好的尺度特性與穩定摺積性，

$$\forall c \in \mathbb{R}, X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta), \text{ then } cX \sim NIG\left(\frac{\alpha}{c}, \frac{\beta}{c}, \mu, \delta\right) \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & \text{If } X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_1, \delta_1), Y \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_2, \delta_2) \\ & \text{then } X + Y \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_1 + \mu_2, \delta_1 + \delta_2) \end{aligned} \quad (3.23)$$

接下來介紹 NIG 分配的動差母函數與較常見的中央動差，若  $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$  則動差母函數為

$$M_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) = \exp(\mu t) \frac{\exp(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{\exp(\delta \sqrt{\alpha^2 - (\beta + t)^2})} \quad (3.24)$$

$$\mathbb{E}(X) = \mu + \delta \frac{\beta}{\gamma}, \quad \mathbb{V}(X) = \delta \frac{\alpha^2}{\gamma^3}, \quad \mathbb{S}(X) = \frac{3\beta}{\alpha \sqrt{\beta\gamma}}, \quad \mathbb{K}(X) = 3 + \frac{(1 + \left(\frac{2\beta}{\alpha}\right)^2)}{\delta\gamma}$$

在使用 NIG 分配於單因子結構模型中時，必須先求出資產報酬率  $A$  的分配，過程如下

$$aM \sim NIG\left(\frac{\alpha_1}{a}, \frac{\beta_1}{a}, a\mu_1, a\delta_1\right) \quad (3.25)$$

$$\sqrt{1-a^2}X \sim NIG\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{1-a^2}}, \frac{\beta_2}{\sqrt{1-a^2}}, \sqrt{1-a^2}\mu_2, \sqrt{1-a^2}\delta_2\right) \quad (3.26)$$

當  $\frac{\alpha_1}{a} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{1-a^2}}$  且  $\frac{\beta_1}{a} = \frac{\beta_2}{\sqrt{1-a^2}}$  時，假設

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\alpha, \quad \beta_1 = \beta, \quad \beta_2 = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\beta$$

利用穩定摺積性質求出資產報酬率函數  $A$  的分配如下

$$A \sim NIG\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{a}, a\mu_1 + \sqrt{1-a^2}\mu_2, a\beta_1 + \sqrt{1-a^2}\delta_2\right) \quad (3.27)$$

為了使  $A$  的分配平均數為零且變異數為單位變異數，所以必須增加參數限制

$$\mu_1 = -\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \quad \mu_2 = -\frac{\sqrt{1-a^2}\beta\gamma^2}{a\alpha^2}, \quad \delta_1 = \frac{\gamma^3}{\alpha^2}, \quad \delta_2 = \frac{\sqrt{1-a^2}\gamma^3}{a\alpha^2}$$

則最終資產報酬率函數  $A$  的分配為

$$A \sim NIG\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{a}, -\frac{1}{a}\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \frac{1}{a}\frac{\gamma^3}{\alpha^2}\right) \quad (3.28)$$

為了在方程式中清楚表示 NIG 分配的機率分配函數，當分配形式符合

$NIG\left(s\alpha, s\beta, -s\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, s\frac{\gamma^3}{\alpha^2}\right)$  時，此分配的機率分配函數記為  $F_{NIG(s)}(x)$ 。

現在以 NIG 分配取代單因子結構模型中的常態分配，當  $X \sim F_{NIG\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right)}(x)$

且  $M \sim F_{NIG(1)}(x)$  時，則(3.16)式轉變如下



$$F_{\infty}(t, x) = 1 - F_{NIG(1)} \left( \frac{c(t) - \sqrt{1-a^2} F_{NIG} \left( \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \right)^{-1}(x)}{a} \right) \quad (3.29)$$

另外假設  $w = F_{NIG} \left( \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \right)^{-1}(x)$ ，則(3.18)式轉變為

$$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \int_{F_{NIG} \left( \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \right)^{-1}(k_1)}^{F_{NIG} \left( \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \right)^{-1}(k_2)} \left( F_{NIG} \left( \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \right)(w) - k_1 \right) f_{NIG(1)} \left( \frac{\sqrt{1-a^2}w - c(t)}{a} \right) dw \quad (3.30)$$

將這兩項結果帶入(3.17)可以得到資產組合的期望損失。最後利用(3.6)及(3.7)式即可得到在時間  $t$  時，單因子結構 NIG 分配模型下的理論價格。

雖然 NIG 分配在單因子結構模型已經有相當好定價能力，但在較高層級的分券仍有改進空間，所以在下節將討論 NIG 分配在 RFL 模型的定價公式。

#### 第四節 單因子 RFL 結構模型

RFL 模型為單因子結構模型將市場因子  $M(t)$  的係數改成隨機負荷，本文中討論的是兩點(two-points)隨機風險因子負荷如下

$$a(M) = \begin{cases} a & \text{if } M(t) < \theta \\ b & \text{if } M(t) \geq \theta \end{cases} \quad (3.31)$$

隨機因子負荷的優點是可以隨  $M(t)$  大小調整各資產間相關係數的大小，這樣可以改善在較高階層分券的定價偏誤。

在 RFL 模型下且假設資產組合為 LHP，則單因子結構模型(3.8)變成

$$A(t) = a(M)M(t) + vX(t) + \eta \quad (3.32)$$

由於常態分配下的 RFL 模型較為簡單，所以本文直接推導 NIG 分配下的 RFL 模型，在討論常態分配時，僅需將 NIG 分配累積分配函數與機率分布函數替換成常態分配即可。現在假設

$$M(t) \sim \text{NIG} \left( \alpha, \beta, \frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \frac{\gamma^3}{\alpha^2} \right) \quad (3.33)$$

$$X(t) \sim \text{NIG} \left( \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \alpha, \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \beta, \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \frac{\gamma^3}{\alpha^2} \right) \quad (3.34)$$

因為本文除了準確度外還須考慮計算效率，當  $\beta \neq 0$  時會造成 RFL 模型計算時間大增，於是本文優先考慮  $\beta = 0$  的情況。在假設  $\beta = 0$  後，為了使  $A_i(t)$  期望值為零且變異數為一，需要求出特定的  $v$  及  $\eta$ 。

$$\begin{aligned} \eta &= -E[a(M)M] = -E[aMl_{\{M(t)<\theta\}} + bMl_{\{M(t)\geq\theta\}}] \\ &= - \left( \int_{-\infty}^{\theta} am dF_{\text{NIG}(1)}(m) + \int_{\theta}^{\infty} bmdF_{\text{NIG}(1)}(m) \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

其中  $l_{\{condition\}}$  為指標函數(indicator function)。

計算得到  $\eta$  後，再根據假設變異數為一，則  $v$  為

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{1 - \text{Var}[a(M)M]} \\ &= \sqrt{1 - \{E[(a(M)M)^2] - E[a(M)M]^2\}} \\ &= \sqrt{1 - \left( b^2 + (a^2 - b^2) \int_{-\infty}^{\theta} m^2 dF_{\text{NIG}(1)}(m) \right) + \eta^2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

接下來需要找到違約門檻值 $C(t)$ ，利用

$$q(t) = P[T \leq t] = P[A(t) \leq C(t)] \quad (3.9)$$

其中

$$\begin{aligned} P[A(t) \leq C(t)] &= \int_{-\infty}^{\theta} F_{NIG\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right)}\left(\frac{C(t) - am - \eta}{v}\right) dF_{NIG(1)}(m) \\ &+ \int_{\theta}^{\infty} F_{NIG\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right)}\left(\frac{C(t) - bm - \eta}{v}\right) dF_{NIG(1)}(m) \quad (3.37) \end{aligned}$$

結合(3.9)和(3.37)求解可以求出 $C(t)$ 的值。為了求出資產組合的期望損失函數，必須求出 $F_{\infty}(t, x)$ ，將 RFL 模型帶入(3.29)

$$F_{\infty}(t, x) = 1 - l_{\left\{\frac{\Omega(x)}{b} < \theta\right\}} F_{NIG(1)}(m) \left\{\frac{\Omega(x)}{a}\right\} - l_{\left\{\frac{\Omega(x)}{b} \geq \theta\right\}} F_{NIG(1)}(m) \left\{\frac{\Omega(x)}{b}\right\} \quad (3.38)$$

$$\text{where } \Omega(x) = C(t) - F_{NIG\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right)}^{-1}(x) - \eta$$

利用(3.38)求出 $F_{\infty}(t, x)$ 後帶入(3.17)得到資產組合的期望損失。最後使用(3.6)及(3.7)式就可以得到在時間 $t$ 時，單因子 RFL 結構模型在 NIG 分配假設下市場定價的理論價格。

本章介紹合成型 CDO 的定價方式與計算方法後，下章節我們將就實際資料做定價的估計，並評估各模型的準確性與效率。

## 第四章 實證分析

本章節將進行合成型 CDO 定價之實證分析，選用的資料為 DJ iTraxx Europe 信用交換指數，合約期長為五年，分別使用單因子常態結構模型、單因子 NIG 結構模型、常態分配下與 NIG 分配下的 RFL 單因子結構模型進行定價，並比較各模型準確性及效率。

### 第一節 DJ iTraxx Europe 指數

DJ iTraxx Europe 指數為包含 125 家企業的信用違約交換之資產組合，而此合成型 CDO 分券分成 0%~3%、3%~6%、6%~9%、9%~12%、12%~22%。各分券的獲利方式分為兩種，第一種為在訂立契約時給予與市場報價相等的費用，之後每一期給予固定信用價差(如(3.7)式表示)；第二種為僅給予信用價差(如(3.6)式表示)，而給予的金額比例依照信用資產的名目本金之百分比或是 basis point(bp)為單位，若是報價方式為百分比加上 bp，則屬於第一種分券獲利方式，若是只有 bp 則為第二種分券獲利方式。

本文挑選的 DJ iTraxx Europe 指數共有兩組不同時間的市場報價，其報價日期分別為 2009/03/31 與 2011/09/11，契約長度皆為五年，其報價如表 4.1。

表 4.1 DJ iTraxx Europe 市場報價

分券層級	2009/03/31	2011/09/11
0%~3%	66.83%+500bp	61.65%+500bp
3%~6%	31.23%+500bp	27.60%+500bp
6%~9%	11.53%+500bp	19.17%+300bp
9%~12%	418.8bp	4.915%+100bp
12%~22%	155bp	2.4317%+100bp

## 第二節 合成型 CDO 各分券定價

本節將進行不同模型對各分券的定價，在定價之前需要給定一些外生變數數值，在 2009 資料中，其平均 CDS 價差為 127.67bp、資產回復率為 40%、無風險利率以發布分券市場報價當天的 Euro LIBOR 隔夜拆帳率 1.317% 為準；2011 年資料中平均 CDS 價差為 124.913bp、回復率為 40%、無風險利率為 1.275%。此外，每個模型都有需要估計的參數，常態結構模型需要最佳化資產組合間相關係數  $\rho = a^2$ ；而 NIG 結構模型需要估計相關係數  $\rho = a^2$  與分配參數  $\alpha$ 、 $\beta$ ；RFL 結構模型需要估計市場因子係數可能帶入的兩個值  $a^2$ 、 $b^2$ 、市場因子分界  $\theta$ 、RFL NIG(1) 則需要多估計分配參數  $\alpha$ 。

表 4.2 為 2009 年資料的模型定價、表 4.3 為 2011 年資料的模型定價，兩表中 Normal、NIG(1)、NIG(2) 最佳化參數資料引用自林聖航(2012)之結果，各分券層級相對各模型資料即為模型所預測的理論價格，其中 NIG(1) 分配為參數  $\beta = 0$  之 NIG 分配，NIG(2) 為不假設任何參數值之 NIG 分配。平均定價一次耗時為各模型在給定所需參數後，重複計算一組理論價格所需時間十次後的平均，也就是計算 0%~3% 分券至 12%~22% 分券的理論價格所需要的時間平均，其單位為秒 (s)，由於本文在準確度外還需考慮計算效率，而 RFL NIG(2) 的維度較高，在最佳化的過程中會增加許多計算時間，所以此模型將不在本文考慮範圍之內。各列資料中使用粗體字的數值表示其模型在該分券之理論定價最接近市場價格。

表 4.2 中可以判斷 Normal 分配與 NIG(1) 分配的理論價格表現相差無幾，各分券的理論價格都相當接近，絕對誤差加總兩者分別為 910bp 與 927bp，唯在 12%~22% 分券定價為 139.44bp 較其他模型接近市場報價，但兩個模型都是在權益分券高估定價，分別高出 60bp 與 40bp，其他分券為全部低估；NIG(2) 分券整體表現為單因子結構模型中最佳，其絕對誤差加總僅 307bp，並且在 9%~12% 分券定價為 391bp 為全模型中最佳，但全分券的理論定價皆低於市場報價；RFL 兩種模

型中，RFL Normal 與 RFL NIG(1)在前三層分券比現都極佳，兩者幾乎完全與市場報價相同，而在 9%~12%分券定價分別為 483bp 與 498bp 皆高於市場報價的 41bp，但在 12%~22%分券時，兩個模型卻又低估了市場報價，分別為 88bp 與 77bp，這現象與前面的三個模型大不相同。

表 4.2 的平均定價一次耗時上可以看出，Normal 分配的定價是最快的，僅須 0.02s，也因此最佳化的時候幾乎是不需等待即可最佳化參數數值；而 NIG(1) 與 NIG(2)其實幾乎都是 0.7s，在最佳化參數的過程中，由於 NIG(2)維度較 NIG(1)高，所以會更加耗時，但兩者在定價時幾乎也不需等待；而 RFL 的模型中，因為 Normal 分配本身參數較少，只需估計相關係數 $a^2$ ，雖然現在需多估計兩個參數，但其計算效率仍然極佳，僅需 NIG 分配的一半約 0.35s，而 RFL NIG(1)在計算上就顯得相當耗時，平均一次定價需約 26s，這也導致其最佳化耗時時間極長，平均最佳化一組參數約需耗時 5.5 小時。

表 4.2 2009/3/31 市場定價與各模型定價結果

分券層級	市場報價	Normal	NIG(1)	NIG(2)	RFL Normal	RFL NIG(1)
0%~3%	66.83%	66.89%	66.87%	66.82%	<b>66.83%</b>	<b>66.83%</b>
3%~6%	31.23%	27.55%	27.46%	27.46%	<b>31.13%</b>	31.02%
6%~9%	11.53%	6.71%	6.62%	9.13%	<b>11.53%</b>	<b>11.53%</b>
9%~12%	418.8bp	380.49bp	379.41bp	<b>390.90bp</b>	482.50bp	497.87bp
12%~22%	155bp	139.12bp	<b>139.44bp</b>	116.91bp	87.59bp	77.11bp
各分券絕對 誤差加總		910.06bp	926.84bp	307.23bp	<b>144.41bp</b>	180.62bp
$a^2$		0.2589	0.2601	0.2347	0.1690	0.1401
$b^2$					0.3331	0.4326
$\theta$					-0.9982	-0.9993
$\alpha$			10.0174	2.9963		1.4004
$\beta$			0	1.4850		0
平均定價 一次耗時		0.02 s	0.7 s	0.67 s	0.37 s	25.88 s

表 4.3 為 2011 年報價，Normal 模型與 NIG(1)模型表現相差無幾，兩者的絕



對誤差加總分別為 16.54% 與 16.6%，但與 2009 年不同的是，兩組模型的理論定價並不是全部都高估，而是在先低估後再高估，而 Normal 的 12%~22% 分券之理論定價 2.6% 為全部模型中最佳；NIG(2) 於此資料中仍然表現優異，但各分券的理論定價卻呈現低估與高估交錯出現的情形，其在 3%~6% 分券定價為 27.66%，已經相當接近市場報價，甚至表現較 RFL NIG(1) 的 27.79% 準確；RFL 模型的兩種分配依然在準確度上較單因子結構模型好，其中 RFL Normal 在權益分券與 3%~6% 分券均與市場報價相同，分別為 61.65% 與 27.6%，其他分券也是出現高估與低估交錯的現象，而 RFL NIG(1) 則為全部模型中最準確的，並且在 6%~9% 與 9%~12% 分別定價為 19.17% 和 9.23% 是全部模型中最接近市場報價的，其全部分券絕對誤差加總更是其他模型誤差的一半以下，約 6.3%，準確度相當高。

在平均定價一次耗時方面，由於模型的結構大多與上表相同，僅外生變數數值方面有所改變，所以計算時間基本上是差不多的，僅有些誤差，其中仍以 RFL NIG(1) 耗時最多。

表 4.3 2011/9/11 市場定價與各模型定價結果

分券層級	市場報價	Normal	NIG(1)	NIG(2)	RFL Normal	RFL NIG(1)
0%~3%	61.65%	61.67%	61.67%	61.63%	<b>61.65%</b>	<b>61.65%</b>
3%~6%	27.60%	24.15%	24.11%	27.66%	<b>27.60%</b>	27.79%
6%~9%	19.17%	14.11%	14.07%	16.48%	15.79%	<b>19.17%</b>
9%~12%	4.915%	12.749%	12.725%	13.523%	12.81%	<b>9.228%</b>
12%~22%	2.4317%	<b>2.6094%</b>	2.6124%	1.7644%	1.7511%	0.6366%
各分券絕對 誤差加總		16.54%	16.60%	12.05%	11.96%	<b>6.305%</b>
$a^2$		0.3018	0.3024	0.2758	0.2227	0.2067
$b^2$					0.4388	0.5080
$\theta$					-0.0710	-0.7203
$\alpha$			15.2841	2.9572		1.6375
$\beta$			0	1.4886		0
平均定價 一次耗時		0.01 s	0.67 s	0.67 s	0.33 s	27.17 s

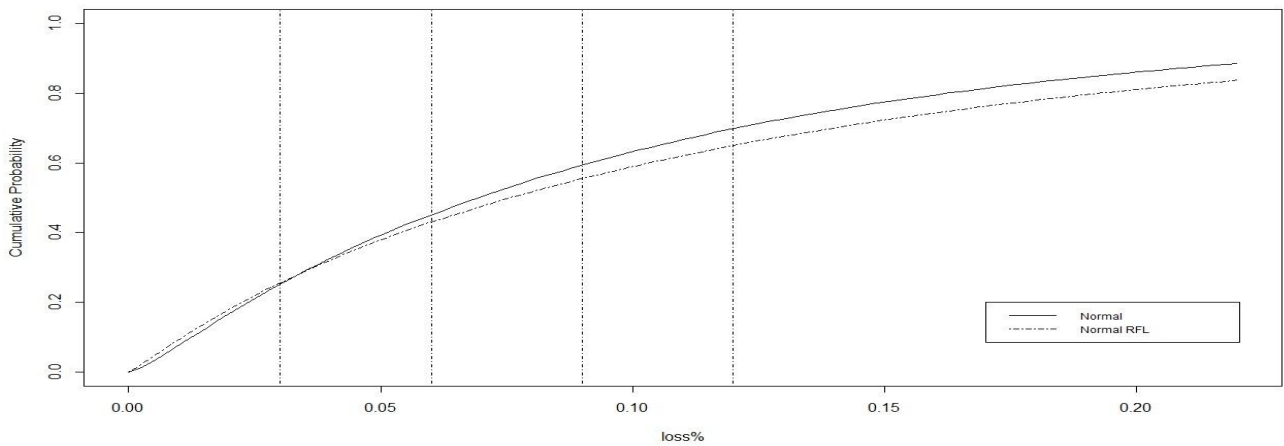


圖 4.1 2009 年損失函數累積機率

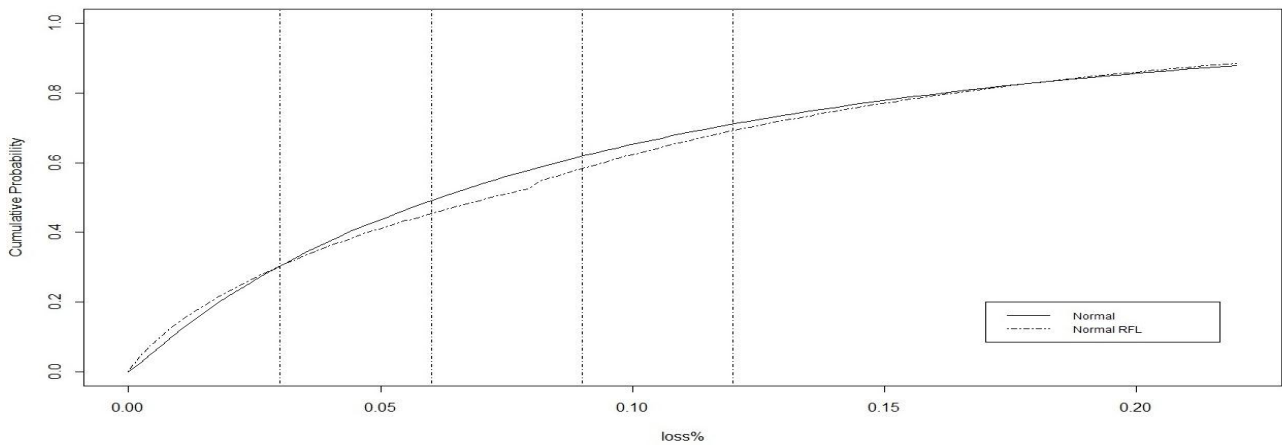


圖 4.2 2011 年損失函數累積機率

上面兩張圖分別為 2009 年與 2011 年的損失函數累積分配圖，圖中實線為單因子常態結構模型，虛線為 RFL Normal 模型，而垂直橫軸的虛線分別為分券上界的 3%、6%、9%、12%，損失函數的最大值為 22%。

由圖 4.1 可以看出來 RFL Normal 相較於單因子 Normal，將更多機率分佈調整至 4% 損失以下，並且將較高損失比例的機率降低；而圖 4.2 更可以看出 RFL Normal 在分配上確實有做顯著的調整，在損失比例 3% 之前與約 20% 以後 RFL Normal 的機率分佈較 Normal 高，但在中間的部分卻較低，目的是為了使損失函數的機率分佈更接近真實市場損失函數，以求得更正確的理论價格。



## 第五章 結論與建議

本文研究目的為對於合成型 CDO，利用不同的單因子結構模型，觀察何種模型具有最佳的效率與準確性，並判斷 RFL 模型是否較一般單因子結構模型更加適合用於合成型 CDO 之定價。本文判斷準確性的標準為定價模型所計算之理論價格與市場報價的絕對誤差；而判斷效率的標準則為計算一組定價時，CPU 計算所需的秒數，以及在最佳化各模型參數上所需的時間。

根據上一章資料，在定價合成型 CDO 時，各種定價模型對於權益分券的定價誤差都很小，而在其他分券的定價表現上，常態分配與 NIG(1)分配在兩個年度資料下表現相差無幾，可能的原因在於，NIG(1)較常態分配多出的變數  $\alpha$  僅控制厚尾與尺度特性，但由於資產組合的報酬分配為偏斜分配，所以 NIG(1)的改善就顯得相當有限；延續以上想法，NIG(2)多了一個參數  $\beta$  控制偏斜特性，所以在定價準確性上表現就相當出色。而 RFL 模型不論何種分配假設，都因為模型本身就具有隨著市場因子調整係數大小的特性，所以定價準確性上都明顯較單因子常態模型及 NIG(1)更佳，而 RFL Normal 與 RFL NIG(1)分別在 2009 與 2011 表現為最佳，主要的原因在於資料結構的改變，由 2009 年的資料來看，在 6%~9%、9%~12%、12%~22% 分券中，RFL Normal 表現較佳，也就代表 RFL Normal 在第二種分券獲利方式是較 RFL NIG(1)來的準確，但 2011 年資料中，由於獲利方式改變，所有分券的獲利都改為第一種獲利方式，所以 RFL NIG(1)反而在各分券中表現較佳。因此可以歸納出，若是定價方式是由第一種分券獲利方式與第二種分券獲利方式混和而成，則 RFL Normal 為較準確的定價模型；但若是由第一種分券獲利方式為主，則 RFL NIG(1)為較準確的定價模型。

在計算效率方面，以定價一次耗時來看，RFL 模型是較一般模型來的耗時許多，RFL Normal 耗時約為 Normal 的 23 倍、RFL NIG(1)耗時約為 NIG(1)的 37 倍。雖然在定價一次耗時來看，即便是 RFL NIG(1)的 27s 也是相當快速，但還

有另一個需要考慮的因素就是最佳化參數的耗時，因為本文中並沒有考慮到最佳化收斂次數的相關研究，所以僅能以多次最佳化耗時的平均時間作為考慮的標準，若是依此當作效率的參考數據，則前四個模型在最佳化的耗時上皆相當快速，平均約都在兩分鐘內可以解出最佳化參數的值，其中以單因子常態模型定價速度最快，而 RFL NIG(1)表現與其他模型有相當大的差異，最佳化平均收斂時間約為五小時，所以幾乎是很難以此模型當作最佳的理論價格模型。

綜合以上討論，若是在相同的分配假設下，RFL 模型的定價準確性確實較一般的單因子結構模型高，但其缺點是會大量增加計算時間；若是在不同分配假設下，以本文兩個年度不同的資料結構來看，儘管絕對誤差差距不大，RFL 模型仍然較 NIG(2)模型更準確；而 RFL 模型中，若是定價年度的定價方式是由第一種分券獲利方式加上第二種分券獲利方式，則 RFL Normal 將是較佳定價模型，若是僅有第一種獲利方式定價，則 RFL NIG(1)為較佳定價模型。最後加上計算效率當作考慮因素，由於 RFL NIG(1)在最佳化耗時與一次定價耗時皆大量高於 RFL Normal，根據上述討論，本文最佳的理論定價模型為 RFL Normal 模型。

本文建議若是研究者不需考慮效率的話，那麼可嘗試將具偏斜特性的分配如  $t$  分配或是 NIG(2)分配加入 RFL 結構，相信可以更加提升準確性；此外，在撰寫程式的時候強烈建議使用由 Kalemánova, A., Schmid, B. Werner, R. (2007)提供的變數變換概念，如(3.18)式所做的轉換，不僅可以大量降低電腦的計算量，並且避免函數在積分過程中發散，導致最佳化過程中止。

## 參考文獻

- [1] Chunfa Wang and Dingwei Huang. (2009). “*Double Normal Inverse Gaussian Copula with Random Factor Loadings Model for Synthetic CDO Pricing.*” Management and Service Science, 2009. MASS '09. International Conference on.
- [2] Li. David X. (2000). “*On Default Correlation: A Copula Function Approach.*” Journal of Fixed Income, Vol. 9, Issue 4, pages 43–54.
- [3] Hull, J. and White, A. (2004). “*Valuation of a CDO and an n-th to Default CDS Without Monte Carlo Simulation.*” Journal of Derivatives, Vol. 12, No. 2, pp. 8–23.
- [4] Kalemanova, A., Schmid, B. Werner, R. (2007). “*The normal inverse gaussian distribution for synthetic CDO pricing.*” Journal of derivatives, Vol 14, pp. 80-93.
- [5] Barndorff-Nielsen O. E. (1987). “*Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae.*” Scandinavian Journal of Statistics 5, pp. 151-157.
- [6] O'kane, D., and Livesey, M. (2001). “*Modeling Credit: Theory and Practice.*” Quantitative Credit Research, Lehman Brothers.
- [7] Vasicek , O. (2002). “*Loan Portfolio Value.*” Risk, Vol. 12, pp.160-162
- [8] 邱熾燁 (2007) 探討單因子複合分配關聯結構模型之擔保債權憑證之評價, 國立政治大學博士學位論文
- [9] 林聖航 (2012) 探討合成型抵押擔保債券憑證之評價, 國立政治大學碩士學位論文