國 立 政 治 大 學 應 用 數 學 系

數 學 教 學 碩 士 在 職 專 班

碩士學位論文

模糊集合與模糊矩陣及其應用

Fuzzy set theory and fuzzy matrix with its applications

碩專班學生：黃振家

指導教授：吳柏林　博士

中　華　民　國　一　百　年　七　月

摘要

本文以人對事物現象認識的感覺與模糊性作爲切入點，闡述模糊性是人對事物認識的一種表徵及反應。然後，引入模糊集合的定義及刻劃模糊集合的表示函數一隸屬度，對模糊集合的各種運算、模糊矩陣、模糊差集以及宇集等內容進行較詳細的討論，並以各種事例說明一些相關概念和運算。

最後，再深入探討如何以模糊矩陣表示圖學中有向圖的問題。

關鍵詞：模糊集合、隸屬度函數、模糊矩陣、有向圖

Abstract

This article is to focus on the understanding of human being to the phenomenon of things as well as the fuzziness. Then, by applying the definition of the fuzzy set and explaining the membership of fuzzy set, we are going to have a detailed discussion of the operation of fuzzy set, fuzzy matrix, fuzzy subtraction and universal set. Examples are given to demonstrate some of the related concepts and expression. Next, further questions about how to display directed graph in the graph theory with fuzzy matrix will be discussed .

Keywords： fuzzy set, membership function, fuzzy matrix, directed graph

目錄

1.前言

人類的思維主要是源於對自然現象和社會現象的認知意識，而人類的知識語言也會因本身的主觀意識、時間、環境以及分析事情的角度不同而具備模糊性。模糊理論的產生即是參考人類思維方式對環境所用的模糊測度與分類原理，給予較穩健的描述方式，以便處理多元複雜的曖昧關係與不確定性現象。

通常，人類思維有兩種形式，一種爲形式化思維(formal thinking)，另一種爲模糊思維(fuzzy thinking)；前者具有邏輯性和順序性的思考，而後者則是全體性和綜合性的思考。當面臨決策判斷而進行思考時，基於形式化思維的二元邏輯，常常很難表示出人類思考的多元邏輯特性。

當有人說，他今天感到很快樂時，究竟他對於快樂的認知爲何呢？什麼樣的測量標準可以稱得上快樂呢？或是這樣的感覺持續多久的時間以上才能算是快樂呢？然而，對這樣的問題，每個人的回答皆因其主觀性而有所不同，即使回答者爲同一人，也會因爲所處的環境、或是外在條件的不同，而可能出現與之前相異的答案。諸如此類很多的論點和問題，都不是能夠用絕對的二元邏輯所可以界定的。其原因則皆源自人類思維的模糊性。但是，人們卻經常被要求做出絕對的判斷或選擇，以人性的觀點來看，這是十分不合理的。

對不確定性的事物做出決策，是相當重要的人類活動。不確定性是決策分析研究中的最主要的困難所在。事件的不確定性主要有兩種表現形式：隨機性與模糊性。如果不確定性僅僅是由於事物的隨機所引起的，那麼模糊數據統計分析的發展則爲這類決策活動提供很好的理論依據。事實上，我們在決策過程中所遇到的不確定性問題，往往不只是由於事物的隨機所引起，這種不確定性還可能是：不完全的資訊、已知的部分知識、對環境模糊的描述等，這類資訊出自於測量與感知中的不確定因素，主要是我們的語言及人類思維對某些概念表達模糊所引起。通常，這些不明確性比我們想像的要複雜得多。

顯然，如果要對人類思維的模糊性做出比較好的判斷，我們必須儘量將所得到的資訊都考慮在內，特別是屬性問題。由於屬性問題本身的模糊性與不精確性，若我們利用此假設的精確值來做出因果分析與計量度量，可能造成判定偏差及決策失誤，甚至會擴大預測結果與實際狀態之間的差異。因此，對於這些在思考認知不易表達完善的屬性問題，借助於軟計算方法與模糊數據統計分析可以更明確地表達出來。

有些學者認爲，模糊理論是研究不確定的現象，應該與機率論相類似。然而，機率論是研究隨機性問題，隨機性雖不確定，但那是因爲條件不充分引起的，事件的發生是隨機的，事件發生之後就是確定的，例如，擲一個公正骰子，出現 1, 2, 3, 4, 5, 6 點之機率均爲 1/6，當擲完一次骰子之後，出現多少就是多少。而模糊理論的事件本身卻是模糊的、不精確的，例如，回答某家庭經濟狀況屬於不錯、小康或中等等，這些均不屬於隨機，而是事件本身的不完整性與不精確性。查德(L. A. Zadeh, 1999)更建議引用感知測度(perception measure)和軟計算(soft computing)共同做爲模糊函數估計量，這種應用模糊概念將屬性關係數學模型化的方法，我們統稱爲軟計算方法。實際上，軟計算是一些計算方法的綜合，其核心包括，模糊邏輯、神經元演算法、遺傳演算法以及機率演算法。這些方法之間相互補充、協同作用而無優劣之分。

模糊理論的概念，主要強調人的喜好程度不需非常清晰或數值精確，因此，對人的感知而言，模糊模型比直接指定單一物體一個值，更適合於評估人所認識的物體之間多元或相關特性。如同二元關係在經典數學中的作用一樣，模糊關係在模糊數學的研究中佔有重要地位。而模糊矩陣，就像我們在本研究即將看到的那樣，是表示和研究模糊關係的重要工具。我們從二元關係開始引出關於模糊矩陣的討論。

本文主要分爲五章，第一章爲前言；第二章爲模糊集合，探討人類思維與模糊集合的關係；第三章介紹模糊集合關係矩陣與運算；第四章介紹有向圖的基本概念並給出模糊矩陣及其冪序列的圖學表示，主要目的是把有向圖作爲布林矩陣和模糊矩陣的一種表示工具來使用，與分解定理作爲我們的主要理論，並提供一種具體、簡單的視覺化平台；最後，第五章爲結論及未來研究方向。

2. 模糊集合

2.1 模糊集合與隸屬度

普通集合對應於二值邏輯，表現爲布林代數。元素 x 屬於或不屬於某一個集合 A，非常清楚，毫不含糊。古典集合論在數理科學上已經建立起一套相當完善、系統的邏輯體系。

但是，若將此集合關係應用於描述某些事物現象時，經常會出現不合理的情況。因爲某些現象並不一定存在「非此及彼」的關係。例如，進行某一教學單元後，將班級的學生劃分成「精熟」和「不精熟」兩類，這樣的劃分很明顯的有不合理之處，因爲學生的精熟程度並非是二元的現象，而是有各種不同精熟程度連續性的特性。自查德((L.A. Zadeh, 1965)提出模糊集合及模糊理論以來，此種思維可以解釋許多事物現象。模糊理論將元素和集合之間的關係，通過介於[0, 1]之間的隸屬度加以描述。

設 U 表示所要研究對象的集合，稱爲論域。對於論域 U 的一個子集 A，可以利用它的特徵函數(characteristic function)來表示。令

$$I_\mu(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases} \tag{2.1}$$

I_μ 表示在 U 上定義的取值於{1, 0}的函數，稱爲集合 A 的特徵函數，I_μ 明確表示了集合 A，對於 $x\in A$，若 $I_\mu(x)=1$, 則表示 x 是 A 中的元素；若 $I_\mu(x)=0$, 則表示 x 不是 A 中的元素。由此，下面給出模糊集合的定義。

定義 2.1 模糊集合 ：

設 U 表示一個論域，U 上的一個模糊子集 A 是指對於任何 $u\in A$ 都有一個實值函數 $\mu_A(u)\in[0,1]$ 與之對應，也就是

$$\begin{aligned}&\mu_A : U\to[0,1];\\ &u\mapsto \mu_A(u)\in[0,1]\end{aligned} \tag{2.2}$$

映射 μ_A 稱為 A 的隸屬函數，$\mu_A(u)$ 表示元素 u 屬於 A 的程度，稱為 u 對 A 的隸屬度(membership)。

U 上的模糊子集所構成的集合全體稱爲模糊冪集，記爲 $\mathcal{F}(U)$ 。

$$\mathcal{F}(U)=(A\mid \mu_A : U\to[0,1]) \tag{2.3}$$

顯然，$\mathcal{F}(U)\supset \mathcal{P}(U)$ ，其中 $\mathcal{P}(U)$ 表示普通冪集。

模糊子集是由其隸屬度函數來決定的。隸屬函數則是普通集合中特徵函數的推廣。一般地說，模糊集合 μ_A 是一個抽象的事物，而隸屬函數 μ_A 則是一個具體的。通常，只能通過 A 來認識及掌握模糊集合 A。

隸屬度函數是模糊理論的基礎，它是從傳統集合中的特徵函數所衍生出來的，用以表達元素對模糊集合的隸屬度，其範圍介於 0 到 1 之間。對於元素和集合的關係，古典集合將元素和集合之間的關係用特徵函數來說明，亦即若 $u\in A$ ，則

$I(x)=1$；若 $u \notin A$，則 $I(x)=0$。但是，查德(Zadeh, 1965)在模糊集合論中提到，若一個元素屬於某一個集合的程度越大，則其隸屬度值越接近於 1，反之則越接近於 0。

例 2.1 天氣好壞的模糊集合

設論域 $U=\{$星期一，星期二，星期三，星期四，星期五，星期六，星期日$\}$。若從星期一到星期三是好天氣，而從星期四到星期日都是壞天氣，按普通集合觀點，特徵函數有 $f_A(u)=1$，u(好天氣)$\in A$； $f_A(u)=0$，u(壞天氣)$\notin A$。隸屬度分別爲： μ_A(星期一)=1； μ_A(星期二)=1； μ_A(星期三)=1； μ_A(星期四)=0； μ_A(星期五)=0； μ_A(星期六)=0； μ_A(星期日)=0。

實際上，在好天氣、壞天氣之間是由差異的，利用模糊集合的概念可以選取[0, 1]之間的數，對天氣情況加以細化。這時相對於好天氣的隸屬度可寫成：μ_A(星期一)=0.9；μ_A(星期二)=0.8；μ_A(星期三)=0.7； μ_A(星期四)=0.4； μ_A(星期五)=0.3； μ_A(星期六)=0.2； μ_A(星期日)=0.1。

模糊集合標記法

普通集合的標記法有列舉法，即列舉所有元素，適用於元素個數有限的集合；還有描述法，也就是給出元素的屬性或判定性質。這兩種方法都是集合的元素表達法。除此，還可以使用隸屬函數表達，這是一種對外延的表達。對於模糊集合來說，存在多種表示方法，其原則是要反應出每個元素及其隸屬度。設論域 $U=\{u_1,u_2,...,u_n\}$，A是其上的模糊子集。常見的表示方法有下述幾種形式：

1. 查德（Zadeh）標記法

$$A=\frac{\mu_A(u_1)}{u_1}+\frac{\mu_A(u_2)}{u_2}+\cdots\frac{\mu_A(u_n)}{u_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_A(u_i)}{u_i} \tag{2.4}$$

其中符號 “+”與“∑”都不再是加號與求和號，而是銜接符號，而 $\mu_A(u_i)/u_i$ 也不表示分數，只是表示 $u_{i\,i}$ 對模糊集合 A 的隸屬度。

對於任何論域 U，特別是 U 爲無限集，德還採用“積分符號標記法”，即將 U 上的模糊子集統一地用

$$A=\int_U \frac{\mu_A(u)}{u} \tag{2.5}$$

其中 $\int$ 並不表示積分，只是表示模糊集合的一種符號。

上面的模糊集合事例可

$$A=\frac{0.9}{星期一}+\frac{0.8}{星期二}+\frac{0.7}{星期三}+\frac{0.4}{星期四}+\frac{0.3}{星期五}+\frac{0.2}{星期六}+\frac{0.1}{星期日}$$，其中“分母”表示論域中的元素，而“分子”是相應元素的隸屬度。

2. "向量"標記法

將論域U上的隸屬度按順序寫成向量形式，比如前面的模糊集合可寫成A={0.9, 0.8, 0.7, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1}對於一般的集合A，可以表示為

$$A=\{u_1,u_2,...,u_n\} \tag{2.6}$$

其中$u_i \in [0,1],\ i=1,2,...,n$ ‧ u_i表示第i個元素對集合的隸屬度。

3. "序偶"標記法

將元素與其對應的隸屬度一起構成有序對的形式，前面的模糊集合事例可寫成A={(0.9, 星期一), (0.8, 星期二), (0.7, 星期三), (0.4, 星期四), (0.3, 星期五), (0.2, 星期六), (0.1, 星期日)}對於一般情況，有

$$A=\{(\mu_1,u_1),(\mu_2,u_2),...,(\mu_n,u_n)\} \tag{2.7}$$

4. 具體給出隸屬函數的解析式

當論域為實數集上的一區間時，此法顯得簡單而方便。

例 2.2 給出年齡論域U = (0, 100)上的老年(old)及青年(young)兩個模糊子集的隸屬函數如下:

$$\mu_o(u)=\begin{cases} 0 & 當\ 0\le u\le 50 \\ \left[1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 當\ 50<u\le 100 \end{cases}$$

$$\mu_y(u)=\begin{cases} 1 & 當\ 0\le u\le 25 \\ \left[1+\left(\frac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 當\ 25<u\le 100 \end{cases}$$

其隸屬函數曲線，如圖 2.1 所示。

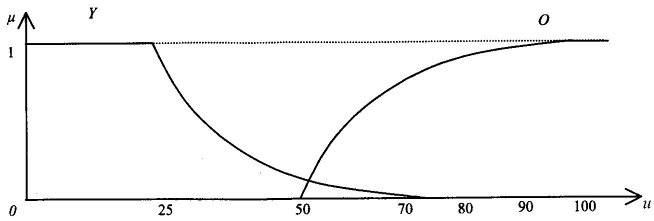

圖 2.1　老年及青年的隸屬函數

2.2 模糊集合運算

普通集合的運算可以利用特徵函數來刻畫及描述。由於隸屬度函數是特徵函數的推廣，所以模糊集合的運算也可以利用隸屬度函數描述。

定義 2.2 模糊集合運算

設A、B、C、D表示論域U上的模糊子集，可以定義出下述運算：

(1) 若對於任意的 $x \in U$，有 $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$，則稱 B 包含 A，記為 $A \subseteq B$。如圖 2.2 所示。

(2) 若 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，則稱 A 與 B 相等，記為 $A = B$。如圖 2.3 所示。

(3) 若對於任意的 $x \in U$，有

$$\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \qquad (2.8)$$

則稱 C 為 A 與 B 的聯集，記為 $C = A \cup B$，符號 $\vee$ 表示‘取大(max)’運算。如圖 2.4 所示。

(4) 若對於任意的 $x \in U$，有

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \qquad (2.9)$$

則稱 D 為 A 與 B 的交集，記為 $C = A \cap B$ 符號 $\wedge$ 表示‘取小(min)’運算。如圖 2.5 所示。

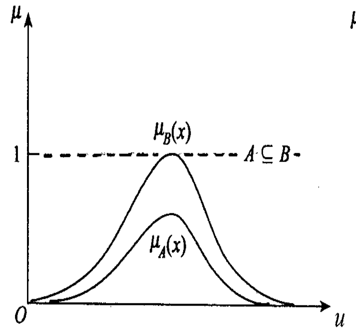

圖 2.2

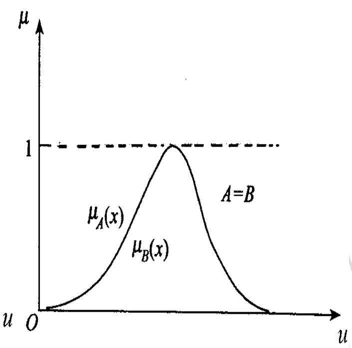

圖 2.3

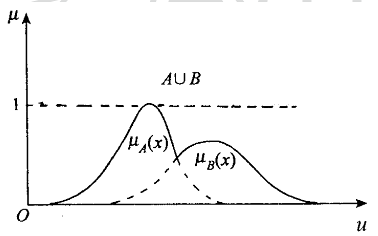

圖 2.4

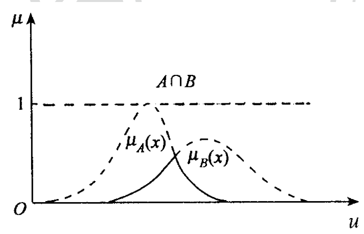

圖 2.5

(5) 若對於任意的 $x \in U$，有

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad (2.10)$$

則稱 A^c 為 A 的餘集(或者補集)。如圖 2.6 所示。

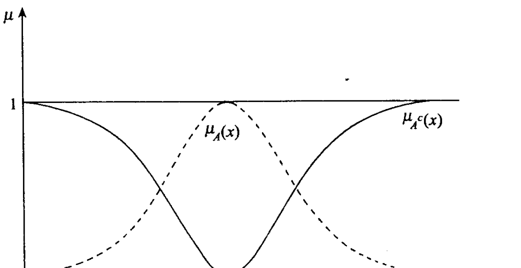

圖 2.6

例 2.3 設 A， B表示兩國人民對宗教的隸屬度，其具體運算式爲

$$A=\frac{0.3}{佛教}+\frac{0.2}{基督教}+\frac{0.1}{回教}+\frac{0.3}{其他教}+\frac{0.1}{未信教}$$

$$B=\frac{0.2}{佛教}+\frac{0.4}{基督教}+\frac{0.2}{回教}+\frac{0.1}{其他教}+\frac{0.2}{未信教}$$

則根據定義 2.2 可得下述關係

$$A^c=\frac{0.7}{佛教}+\frac{0.8}{基督教}+\frac{0.9}{回教}+\frac{0.7}{其他教}+\frac{0.9}{未信教}$$

$$A\bigcap B=\frac{0.2}{佛教}+\frac{0.2}{基督教}+\frac{0.1}{回教}+\frac{0.1}{其他教}+\frac{0.1}{未信教}$$

$$A\bigcup B=\frac{0.3}{佛教}+\frac{0.4}{基督教}+\frac{0.2}{回教}+\frac{0.3}{其他教}+\frac{0.2}{未信教}$$

爲了簡單起見，這裡僅僅考察有限論域情況。至於，無限論域的情況，可以做出類似的討論。

定義 2.3 模糊集合內積與外積

設 A、 B 表示論域 U 上的模糊子集，把 A 與 B 的內積定義為

$$\bigvee_{x\in U}(\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)) \tag{2.11}$$

記為 $A\odot B$；把 A 與 B 的外積定義為

$$\bigwedge_{x\in U}(\mu_A(x)\vee\mu_B(x)) \tag{2.12}$$

記為 $A\otimes B$。

特別地，當 $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ 與 $B=(b_1,b_2,...,b_n)$ 都是模糊向量時， A 與 B 的內積、外積分別為

$$A\odot B=\bigvee_{i=1}^{n}(a_i\wedge b_i),\ A\otimes B=\bigwedge_{i=1}^{n}(a_i\vee b_i) \tag{2.13}$$

性質 2.1 $A\odot B=1-A^c\odot B^c$， $A\otimes B=1-A^c\otimes B^c$；

性質 2.2 $A\odot A^c\le\frac{1}{2}$ ， $A\otimes A^c\ge\frac{1}{2}$；

性質 2.3 設 $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ ，令

$$\bar{A}=\bigvee_{i=1}^{n}a_i \quad , \quad \underline{A}=\bigwedge_{i=1}^{n}a_i$$

稱 $\overline{A}$ 與 $\overline{B}$ 分別為 A 的高與低，則

$$A\odot B\ \le\ \bar{A}\wedge\bar{B},\quad A\otimes B\ge\underline{A}\wedge\underline{B}$$

性質 2.4 若 $A\subseteq B$，則

$$A\odot B=\bar{A},\quad A\otimes B=\underline{B}$$

2.3 模糊矩陣

在現實世界中，事物之間的關係錯綜複雜，有時會出現多種相互關聯的模糊現象，這就需要使用模糊矩陣來刻畫。下面給出模糊矩陣的定義及運算。

定義 2.4 模糊矩陣

矩陣 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 稱為模糊矩陣，如果對任意的 $i\le m$ 及 $j\le n$，都有 $a_{ij}\in[0,1]$。如果 $a_{ij}\in\{0,1\}$，也就是元素只取 0 與 1 兩個值的矩陣，那麼稱 A 為布林矩陣。

定義 2.5 模糊矩陣運算

對於任意矩陣 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 與 $B=(b_{ij})_{m\times n}$，$A+B=(a_{ij}\vee b_{ij})$ 稱為 A 與 B 的和；$A\times B=(a_{ij}\wedge b_{ij})$ 稱為 A 與 B 的叉積，其中符號 $a\vee b$ 表示在 a 與 b 中取較大的，而符號 $a\wedge b$ 表示在 a 與 b 中取較小的。若 $a_{ij}\le b_{ij}\,(i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n)$，則稱 A 小於等於 B，記為 $A\le B$。

由定義 2.4 知，兩個模糊矩陣只有在行列分別相等的情況下才能夠相加、叉乘以及比較大小。

通常，對於任意 m 行 n 列的模糊矩陣 A、B、C 來說，具有下述一些性質：

(1) 交換律：$A+B=B+A,\ A\times B=B\times A$;

(2) 結合律：$(A+B)+C=A+(B+C),\ (A\times B)\times X=A\times(B\times C)$;

(3) 分配律：$(A+B)\times C=(A\times C)+(B\times C),\ (A\times B)+C=(A+C)\times(B+C)$;

(4) 冪等律：$A+A=A,\ A\times A=A$；

(5) 吸收律：$(A+B)\times B=B,\ (A\times B)+B=B$；

(6) 對於任意 m 行 n 列的模糊矩陣 A，都有

$$O\le A\le E,\ O+A=A,\ O\times A=O,\ E+A=A,\ E\times A=A;$$

$$A\le B\Leftrightarrow A+B=B;$$

$$\Leftrightarrow A\times B=A;$$

$$\text{其中 } O=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix},\qquad E=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix};$$

(7) 若 $A_1\le B_1$，$A_2\le B_2$，則 $A_1+A_2\le B_1+B_2,\ A_1\times A_2\le B_1\times B_2$。

定義 2.6 模糊矩陣乘積運算

設 m 行 n 列的模糊矩陣 A 與 n 行 p 列的模糊矩陣 B 分別為

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\qquad E=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2p}\\\vdots&&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{np}\end{bmatrix};$$

它們的乘積C為m行p列的模糊矩陣，亦即

$$C = AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

其中

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{in} \wedge b_{nj}) = \bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge b_{kj}) \text{ ，} 1 \le i \le m, 1 \le j \le p \tag{2.14}$$

例 2.4

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.9 & 0.7 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.5 & 0.9 \\ 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.9 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$

3.模糊集合關係矩陣與運算

3.1 二元對比排序法

此方法是把論域中的每一個元素與其他元素進行充分的兩兩比較屬於 A 的程度後，再經過處理得出各自的隸屬度。

設論域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}, A\in F(U)$ ，則 $u\in U$ 的隸屬函數可用如下方法構造：

(1) 在 U 上建立模糊集合 A 的相對比較關係矩陣

$$P=(p_{ij})_{n\times n}$$

其中 p_{ij} 爲 u_i 相對於 u_j 具有 A 的程度，特別當 $i=j$ 時， $p_{ij}=1$ 。

(2) 建立相對矩陣 p^*

$$p^*=(p_{ij}^*)_{n\times n}$$

其中 $p_{ij}^*=p_{ij}/\max(p_{ij},p_{ji})$ 。

(3) 確定 U 中元素具有 A 的順序。將 p^* 中的每一列取最小值，設第 i 列的最小值爲 α_i ，將 $\{\alpha_i \mid i=1,2,\ldots,n\}$ 從大到小排序，那麼 α_i 所在的順序亦即 u_i 的順序位置。

(4) 依據上述排的順序構造模糊集合 A

$$A=\sum A(u_i)u_i 。$$

例 3.1 設由三個兒子組成的集合 $U=\{u_1,u_2,u_3\}$ ，其中 u_1 表示長子， u_2 表示次子， u_3 表示三子。試確定三個兒子與父親的相似程度，即隸屬度。

依據二元對比排序法，首先在兩兩元素之間進行二元比較，得到

$$p_{11}=1,\quad p_{21}=0.8,\quad p_{31}=0.5;$$
$$p_{12}=0.5,\quad p_{22}=1,\quad p_{32}=0.4;$$
$$p_{13}=0.3,\quad p_{23}=0.7,\quad p_{33}=1;$$

$(p_{21},p_{12})=(0.8,0.5)$ 是一個二元比較級，其含義是把長子與次子相比較，如果長子與父親的相似程度爲 0.8，則次子與父親的相似程度爲只有 0.5。同理，可知其他二元比較級。而 $p_{11}=p_{22}=p_{33}=1$ 表示自己與自己比較與父親相似的程度。因此，得到三個二元比較級是 $(p_{21},p_{12})=(0.8,0.5)$ ； $(p_{32},p_{23})=(0.4,0.7)$ ； $(p_{31},p_{13})=(0.5,0.3)$ 。

然後，建立相對矩陣 p^* 。令 $p_{ij}^*=p_{ij}/\max(p_{ij},p_{ji})$ ，從而得到

$$p^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5/8 & 1 & 4/7 \\ 3/5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

再次，從 p^* 中的每一列中取最小值，得到 1，4/7，3/5。最後，按所得數從大到小排序爲：

$$1>3/5>4/7$$

由此得出結論，長子像父親的隸屬度爲 1，即最像父親；三子像父親的隸屬度爲 0.6，次像父親；次子像父親的隸屬度爲 0.57，即不太像父親。

其他方法

其他一些常見的方法還包括：評分法（專家評分直接給出隸屬函數）；範例法（Zadeh, 1972，依據有關的 μ_A 部分資訊確定出 μ_A）；範形變形法（Bremermann, 1976）；三分法（一種利用隨機區間的思想來處理模糊性的試驗模型）；優選法（Saaty, 1974）；子集比較法（Fuug 和 Li, 1974）；隱分析法（Kochen 和 Badre, 1976）；濾波函數法（MacVicar-Whelam, 1978）；模糊測度法（管野道夫）等。總之，要將問題具體分析，必須在實驗中不斷增長經驗。

若模糊集合定義在實數域上，則模糊集合的隸屬函數就稱爲模糊分佈。爲了在處理這類問題時便於參考，下面給出一些經常使用的模糊分佈。

類似於數理統計學中確定分佈的方法，研究者可根據實際情況，選定一些帶有參數的隸屬函數表示某類型的模糊概念（通常論域爲實數域），然後通過實驗確定參數。這是應用研究者經常採用的方法。

中間型隸屬函數

(1) 矩陣分佈

$$\mu(x)=\begin{cases}0, x\le a-b\\ 1, a-b<x\le a+b\\ 0, a+b<x\end{cases}$$

參看圖 3.1。

(2) 尖 Γ 分佈

$$\mu(x)=\begin{cases}e^{k(x-a)}, x\le a\\ e^{-k(x-a)}, x>a\end{cases}$$

參看圖 3.2。

(3) 正態分佈或高斯分佈 $\mu(x)=e^{-(k-a)^2}$，其中 $k>0$。參看圖 3.3。

(4) 柯西分佈 $\mu(x)=\dfrac{1}{1+\alpha(x-a)^{\beta}}$，其中 $\alpha>0,\beta$ 爲偶數。參看圖 3.4。

(5) 梯形分佈

$$\mu(x)=\begin{cases}0, x\le a-a_2\\ \dfrac{a_2+x-a}{a_2-a_1}, a-a_2<x\le a-a_1\\ 1, a-a_1\le x<a+a_1\\ \dfrac{a_2-x+a}{a_2-a_1}, a+a_1\le x<a+a_2\\ 0, a+a_2\le x\end{cases}$$

參看圖 3.5。

(6) 嶺形分佈

$$\mu(x)=\begin{cases}0, x\le -a_2\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{n}{a_2-a_1}\left[x-\dfrac{a_2+a_1}{2}\right], -a_2<x\le -a_1\\ 1, -a_1<x\le a_1\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{n}{a_2-a_1}\left[x-\dfrac{a_2+a_1}{2}\right], a_1<x\le a_2\\ 0, a_2<x\end{cases}$$

參看圖 3.6。

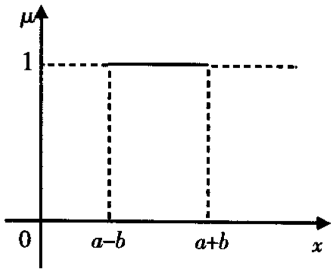

圖 3.1 矩陣分佈

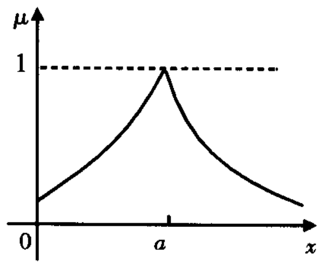

圖 3.2 尖 Γ 分佈

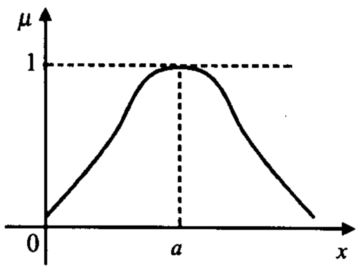

圖 3.3 正態分佈或高斯分佈

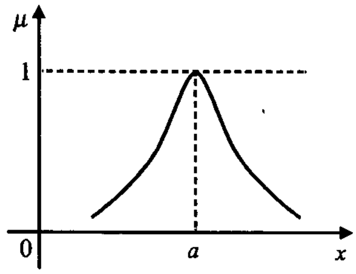

圖 3.4 柯西分佈

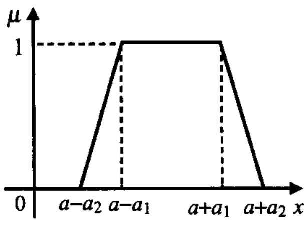

圖 3.5 梯形分佈

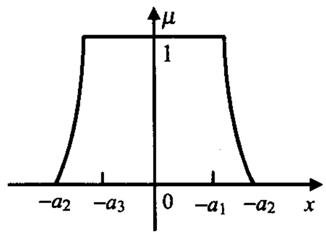

圖 3.6 嶺形分佈

下面，再給出三種標準的隸屬函數。

(7) S 型隸屬函數

$$S(x,a,b)=\begin{cases}0, x\le a\\ 2\left[\dfrac{x-a}{b-a}\right]^2, a<x\le\dfrac{a+b}{2}\\ 1-2\left[\dfrac{x-b}{b-a}\right]^2, \dfrac{a+b}{2}<x\le b\\ 1, b<x\end{cases}$$

參看圖 3.7。

(8) Z 型隸屬函數

$$Z(x,a,b)=1-S(x,a,b)$$

參看圖 3.8。

(9) π 型隸屬函數

$$\pi(x,a,b)=\begin{cases}S(x;b-a,b), x\le b,\\ Z(x;b,a+b), x>b.\end{cases}$$

參看圖 3.9。

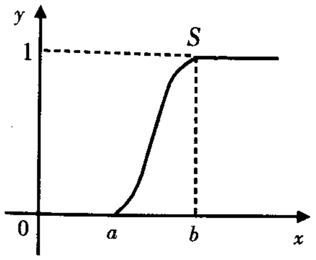

圖 3.7 S 型隸屬函數

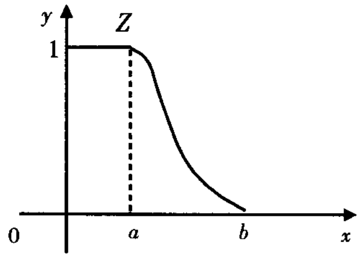

圖 3.8 Z 型隸屬函數

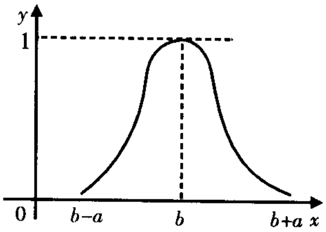

圖 3.9 π 型隸屬函數

3.2 模糊資料與軟運算

軟計算(soft computing)與傳統實數計算方法(也就是硬計算)不同的是，軟計算是基於模糊數或模糊樣本，包括區間數、多值數、語言變數等的數學運算。軟計算的宗旨是，通過對不精確性、不確定性、部分真値以及近似表達的描述，使得問題變得易於處理、獲得穩健性，減少求解費用，更好地與實際相符。

舉一個事例，某大學生每週運動 2-4 回，而每回 1-2 小時，那麼一周運動幾小時? 又比如，某人外出旅遊 7-8 天，需攜帶若干胃腸藥，而胃腸藥標示成人每日 3-4 回，而每回 5-7 顆，請問他須攜帶多少顆。傳統數學無法對此做出明確的計算，但是一般人均會做出大概的計算。這種事例就應屬於軟計算。

下面介紹三種形式的模糊資料(有時，也簡稱爲模糊數)：區間數、模糊數以及三角模糊數。

區間數及其運算

設 R 表示所有實數組成的集合，對於 $a_1,a_2\in R$，其中 $a_1<a_2$ 形成一個區間。當不確定的 x 値滿足 $a_1\le x\le a_2$ 時，則 $[a_1,a_2]$ 稱爲閉區間。a_1,a_2 分別是區間的上界與下界。而 $[a_1,a_2]$ 以及 $(a_1,a_2]$ 分別稱爲有界開區間。同時，稱 $(-\infty,a_2],(-\infty,a_2),[a_1,+\infty),(a_1,+\infty)$ 分別爲無界開或閉區間。集合 R 本身也是一個區間，亦即 $(-\infty,+\infty)$。

R中所有閉區間的集合用$I(R)$表示，其中每一個區間用大寫字母$A,B,C,\ldots$表示，而實數可以看成為點區間，用小寫字母$a,b,c,\ldots$表示。

定義 3.1 區間數A定義為實數x的集合，且$a_1 \le x \le a_2$，即$x \in [a_1, a_2]$或者

$$A = [a_1, a_2] = \{x \mid a_1 \le x \le a_2, x \in R\}。 \tag{3.1}$$

當$a_1 = a_2 = a$時，由式(3.1)所給出的區間數A就退化成一個實數，記為$a = [a, a]$。

區間數A的度量性質的描述：

(1)寬度：

$$w(A) = w[a_1, a_2] = a_2 - a_1 \tag{3.2}$$

(2)值：

$$|A| = |[a_1, a_2]| = \max(|a_1|, |a_2|) = \begin{cases} |a_1|, |a_1| \ge |a_2| \\ |a_2|, |a_1| < |a_2| \end{cases} \tag{3.3}$$

(3)像：

$$A^- = [a_1, a_2]^- = [-a_2, -a_1] \tag{3.4}$$

(4)倒數：

$$A^{-1} = [a_1, a_2]^{-1} = \left[\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}\right], 0 \notin [a_1, a_2] \tag{3.5}$$

經常用到的區間數A之間的關係有包含、等價。下面分別給出它們的定義：

(i) 區間數包含關係：假定存在兩個區間數$A = [a_1, a_2]$與$B = [b_1, b_2]$，若有$b_1 < a_1 < a_2 < b_2$，則稱這兩個區間數的關係爲包含關係，記爲$A \subset B$，即$[a_1, a_2] \subset [b_1, b_2]$或 $B \supset A$, 即

$$[b_1, b_2] \supset [a_1, a_2] \tag{3.6}$$

（3.6）表明，$[a_1, a_2]$區間是$[b_1, b_2]$區間的中的一個子集，我們稱這種包含爲區間嵌套性質。

(ii) 區間數等價關係：在兩個區間$A = [a_1, a_2]$與$B = [b_1, b_2]$中，若$a_1 = b_1, a_2 = b_2$ 則稱A與B等價，記爲$A = B$。

如果是一個實數，也就是點 $a = [a, a]$，那麼它的像$a^- = [-a, -a] = -a$，倒數爲$a^{-1} = [1/a, 1/a] = 1/a$。由此可得，實數運算是區間運算的特例，而區間運算則是實數運算的推廣。因而，區間運算比實數運算要複雜得多。

(iii) 區間數的運算：區間$A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$的算數運算及其規則如下。

(a) 區間數的加法：

$$A + B = [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \tag{3.7}$$

(b) 區間數的減法：

$$A - B = [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_1, a_2 - b_2] \tag{3.8}$$

(c) 區間數的乘法：

$$\begin{aligned} A \cdot B &= A \times B = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \\ &= [\min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), \max(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)] \end{aligned} \tag{3.9}$$

(d) 區間數的除法：

$$A \div B = A/B = [a_1, a_2][b_1, b_2]^{-1} = [a_1, a_2][\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}] \quad (3.10)$$

實際上，減法運算 $A-B$ 可以看成是 A 與 B 的像的加法，而除法運算 $A \div B$ 可以看成是 A 與 B 的倒數的乘法。

值得注意的是，

(1) $A + A^- = [a_1, a_2] + [-a_2, -a_1] = [-(a_2 - a_1), (a_2 - a_1)] \neq 0$ 而且 $A + A^-$ 的左右兩個端點關於 0 是對稱的。

(2)

$$A \cdot A^{-1} = [a_1, a_2] \cdot [\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}] \neq 1,\ 而 1 \in A \cdot A^{-1} 。$$

例 3.2 給定兩個區間數 $A = [1,3], B = [4,6]$ ，則

$A + B = [1,3] + [4,6] = [1+4, 3+6] = [5,9];$

$A - B = [1,3] - [4,6] = [1-6, 3-4] = [-5,-1];$

$A \cdot B = [1,3] \cdot [4,6] = [\min(1\cdot 4, 1\cdot 6, 3\cdot 4, 3\cdot 6), \max(1\cdot 4, 1\cdot 6, 3\cdot 4, 3\cdot 6)] = [4,18];$

$A/B = [1,3]/[4,6] = [1,3] \cdot [1/6, 1/4] = [1/6, 3/4]$

上述結果顯示，如果不確定數 x 與 y 分別位於區間 A 與 B 中，那麼 $x \pm y, xy, x/y$ 仍然是一個不確定的數，而且它們分別在 $A \pm B$, AB 與 A/B 之中。

定義 3.2 離散模糊數的反模糊化值

設 x 表示離散模糊數，語言變數 $\{L_i : i = 1,\ldots,k\}$ 為論域 U 中有序的數列，$\mu_{Li}(x) = m_i$ 為模糊數 x 相對於語言變數 L_i 的隸屬度，$\sum_{i=1}^{n} \mu_{Li}(x) = 1$，則稱 $x_f = \sum_{i=1}^{k} m_i L_i$ 為模糊數 x 的反模糊化值。

定義 3.3 連續型模糊數的反模糊化值

設 c 表示連續型模糊數，其隸屬度函數 $\mu_U(c) = \begin{cases} f(c), 如果 c \in [a,b] \\ 0, 如果\ c \notin [a,b] \end{cases}$，則 $c_f = \dfrac{\int_a^b cf(c)dc}{\int_a^b f(c)dc}$ 為模糊數 c 量化後的值。

在計算模糊資料樣本其相對於語言變數的隸屬度函數時，經常利用三角形隸屬度函數來進行計算工作，其定義及計算方式如下：

定義 3.4 三角形隸屬度函數的計算

設 U 表示其論域，$\{X_i : i = 1,\ldots,n\}$ 為一組模糊樣本。給定 U 的一個有序分割集合，$\{p_j : j = 1,\ldots,r\}$，且其相對於語言變數為 $\{L_j : j = 1,\ldots,r\}$。設 m_j 為其分割集合 P_j 的中間值，若 X_i 介於 m_j 與 m_{j+1} 之間，則其屬於語言變數 L_j 的隸屬度

為 $\dfrac{m_{j+1}-X_i}{m_{j+1}-m_j}$ ，屬於語言變數 L_{j+1} 的隸屬度為 $\dfrac{X_i-m_j}{m_{j+1}-m_j}$ 。

例 3.3 計算股市成交股數對應量的語言變數的隸屬度

設 $\{X_i\}=\{16,34,58,70,88\}$ (單位：千萬)表示台北股市中五檔股票在某個月的成交股數，若選擇一次序分割集合 $U=\{[0,20],[20,40],[40,60],[60,80],[80,100]\}$ ，其相對應的語言變數為：

微量$=L_1 \propto [0,20)$, 小量$=L_2 \propto [20,40)$, 普通量$=L_3 \propto [40,60)$, 大量$=L_4 \propto [60,80)$, 巨量$=L_5 \propto [80,100)$

，其中「 $\propto$ 」表示「相對於」。再取各分割集合的中間值為

$$\{m_1=10, m_2=30, m_3=50, m_4=70, m_5=90\}，$$

其相對應的語言變數為 $\{L_1,L_2,L_3,L_4,L_5\}$ 。因為 $X_1=16$ 介於 10 與 30 之間，因此，可計算出 X_1 相對於 L_1 及 L_2 的隸屬度如下：

$$\frac{30-16}{30-10}=0.7\in L_1, \frac{16-10}{30-10}=0.3\in L_2 。$$

同理，我們可以得到 $\{X_i\}$ 中每一個元素相對於語言變數的隸屬度，如表 3.1 所示。

表 3.1 $\{X_i\}$ 相對於語言變數 $\{L_j\}$ 的隸屬度

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
X_1=16	0.7	0.3	0	0	0
X_2=34	0	0.8	0.2	0	0
X_3=58	0	0	0.6	0.4	0
X_4=70	0	0	0	1	0
X_5=88	0	0	0	0.1	0.9

3.3 模糊關係

在現實世界中，事物是普遍聯繫的，由於共性而聚集，又因個性而相互區別。在普通集合論中的‘關係’可以明確地用“有關”或“無關”做出肯定的回答或者否定回答，因此，這樣的‘關係’抽象地刻畫出事物之間的‘精確性’聯繫。然而，‘模糊關係’則從更深刻的意義上表現出事物間更廣泛的聯繫。在某種意義上講，模糊關係的抽象形式更接近於人的思維。

模糊關係是從普通集合中的關係擴展而來，兩者之間的區別實質在於用來描述各元素間關係的關係子集的特徵函數和隸屬度。

在論域 U 與 V 的元素之間，除了有上述那種明確的“有關”或“無關”關係外，還存在著各種程度的模糊關係，比如“相似程度”等關係，顯然，這類關係就是笛卡兒乘積 $U\times V$ 的一個模糊子集。

定義 3.5 模糊關係

一個 U 到 V 的二元模糊關係 R ，是以 $U\times V$ 為論域的一個子集，亦即 $R\in F(U\times V)$。序偶 (u,v) 的隸屬度 $\mu_R(u,v)$ 刻畫 u 與 v 之間具有關於 R 的相關程度。

若從映射觀點看

$$U \xrightarrow{R} V \begin{cases} \mu_R U \times V \to [0,1] \\ (u,v) \mapsto \mu_R(u,v) \in [0,1] \end{cases} u \in U, v \in V \qquad (3.11)$$

在有限論域中，模糊關係通常用矩陣來表示。一般地，對於有限論域 $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ 到 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ 的模糊關係 R 可用 $n\times m$ 矩陣表示為：

$$R=(r_{ij})_{n\times m} \qquad (3.12)$$

其中 $r_{ij}=\mu_R(u_i,v_j)\in[0,1], i=1,2,\ldots,n, j=1,2,\ldots,m$，把 R 稱為模糊（關係）矩陣。

例 3.4 實數域 R 到 R 模糊關係“x 遠大於 y”：對於任意的 $(x,y)\in R\times R$，有

$$\mu_{遠大於}(x,y)=\begin{cases} 0, x\le y \\ \left[1+\dfrac{100}{(x-y)}\right]^{-1}, x>y \end{cases},$$

經計算得，$\mu_{遠大於}$(1000,100)=0.9，$\mu_{遠大於}$(200,100)=0.5。

例 3.5 設人的身高論域 $U=\{140,150,160,170,180\}(\text{cm})$，

體重論域 $V=\{40,50,60,70,80\}(kg)$

一個 U 到 V 模糊關係定義爲：身高與體重的‘標準’相配，將此關係表述成表 3.2。

表 3.2 模糊關係 R

U(cm) \ $R(u,v)$ \ $V(kg)$	40	50	60	70	80
140	1	0.8	0.2	0.1	0
150	0.8	1	0.8	0.2	0.1
160	0.2	0.8	1	0.8	0.2
170	0.1	0.2	0.8	1	0.8
180	0	0.1	0.2	0.8	1

顯然，可以將此關係用模糊矩陣表示爲：

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

這種身高與體重間的‘標準’關係就可以找出來了。比如，$r_{33}=\mu_R(160,60)=1$，表示 160cm 的身高其體重爲 60kg 才算是符合標準，而 $r_{43}=\mu_R(170,60)=0.8$，表示 170cm 的身高其體重爲 60kg 還略顯得不足。

模糊關係的合成

定義 3.6 模糊關係的合成

設 $R\in F(U\times V),Q\in F(V\times W)$，把從 U 到 W 的模糊關係稱為 R 與 Q 的合成，記為 RoQ，其隸屬函數為

$$\mu_{RoQ}(u,w)=\underset{v\in V}{\vee}(\mu_R(u,v)\wedge\mu_Q(v,w)) \tag{3.13}$$

特別地，當 $R\in F(U\times U)$，則有模糊關係的冪：

$$R^2=R\circ Q,\ldots,R^n=R^{n-1}\circ Q \tag{3.14}$$

當論域是有限域時，模糊關係的合成可利用相應的模糊矩陣合成表示。

定義 3.7 模糊矩陣的合成

設 $R\in M_{n\times m},Q\in M_{m\times l},R=(r_{ij})_{n\times m},Q=(q_{ij})_{m\times l}$，把從 $M_{n\times m}$ 到 $M_{m\times l}$ 的模糊關係

$$S=R\circ Q\in M_{n\times l} \tag{3.15}$$

稱為 R 與 Q 的合成，記為 $R\circ Q$。其中，$S=(S_{ik})_{n\times l},S_{ik}=\overset{m}{\underset{j=1}{\vee}}(r_{ij}\wedge q_{jk})$

特別地，把 R 與 R 自身的合成矩陣稱為模糊矩陣的冪，記為

$$R^2=R\circ R,\ldots,R^n=R^{n-1}\circ R \tag{3.16}$$

例 3.6 設某個家庭的子女與父母的長相相似關係爲模糊關係 R，其具體表述如下表：

R	父	母
兒子	0.7	0.2
女兒	0.3	0.6

寫成模糊矩陣形式爲

$$R=\begin{bmatrix}0.7 & 0.2\\0.3 & 0.6\end{bmatrix}$$

而父親與其父和母爲父'和母'及母親與其父和母爲父''和母''的長相相似關係也是模糊關係，即

R	父'	母'	父"	母"
兒子父親	0.7	0.2	0.0	0.0
女兒母親	0.0	0.0	0.4	0.7

寫成矩陣

$$S=\begin{bmatrix}0.7 & 0.2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.4 & 0.7\end{bmatrix}$$

而子女與爺爺奶奶的長相相似關係就是模糊關係 R 與 S 合成：

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0.7 \wedge 0.7) \vee (0.2 \wedge 0) & (0.7 \wedge 0.2) \vee (0.2 \wedge 0) & (0.7 \wedge 0) \vee (0.2 \wedge 0.4) & (0.7 \wedge 0) \vee (0.2 \wedge 0.7) \\ (0.3 \wedge 0.7) \vee (0.6 \wedge 0) & (0.3 \wedge 0.2) \vee (0.6 \wedge 0) & (0.3 \wedge 0) \vee (0.6 \wedge 0.4) & (0.3 \wedge 0) \vee (0.6 \wedge 0.7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

這個合成關係爲

RoS	父’	母’	父”	母”
兒子	0.7	0.2	0.2	0.2
女兒	0.3	0.2	0.4	0.6

由此可見，兒子長相像其父親的父親，而女兒的長相倒是像其母親的母親。

4.模糊矩陣的圖學表示與分解定理

本節建立模糊矩陣的圖學表示與模糊矩陣冪序列的分解定理。分解定理是模糊矩陣與布林矩陣之間的橋樑，有了這個橋樑，布林矩陣，甚至非負矩陣的許多成果，都可以平行地移植到模糊矩陣上來。

4.1 有向圖，通路及其表示

一般情形下，我們只關心有限圖，即頂點及邊集都是有限的有向圖。如果 $D=\langle V,E\rangle$ 有 n 個頂點，我們稱爲 n 階圖，而稱 $D=\langle V,E\rangle$ 爲 $\langle n,m\rangle$ 圖是指 D 有 n 個頂點並且有 m 個邊。如果 $m=0$，即 $E=\phi$，我們稱爲 D 爲零圖。如果 $n=1,\ m=0$，即 D 只有一個頂點，且無邊，就稱 D 爲平凡圖。

如果沒有特別的指定，我們可以用 v_i 表示頂點，用 e_j 表示邊。當 $D=\langle V,E\rangle$ 給定後，如 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，我們用下面的方式畫出它的圖形：首先，在平面上任意畫出 n 個點並分別標記爲 $v_1,v_2,\cdots,v_n$。其次，對 E 中的每一條邊 e_k，設 $e_k=\langle v_i,v_j\rangle$ 畫出一條 v_i 到 v_j 不經過其他頂點的有向邊。

定義4.1 令 $D=\langle V,E\rangle$ 為有向圖且 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$。如果 $e_k=\langle v_i,v_j\rangle\in E$ 是 D 的一條邊，則稱 v_i，v_j 與 e_k 彼此關聯。v_i 是 e_k 的始點，v_j 為 e_k 的終點，v_i 鄰接到 v_j，v_j 鄰接於 v_i。

無邊關聯的頂點稱為孤立頂點。始點與終點重合的邊稱為自環。

如果兩條邊的始點相同，終點也相同，則稱它們為平行邊，一對頂點間平行邊的條數稱為它們的重數。

例4.1 如圖4.1所示，如果 $e_1=\langle v_1,v_2\rangle$，則 e_1 稱 v_1、v_2 與 e_1 彼此關聯，即 v_1 鄰接到 v_2，v_2 鄰接於 v_1；該圖中沒有孤立頂點，v_2 有自環；v_5 到 v_3 的重數爲3。

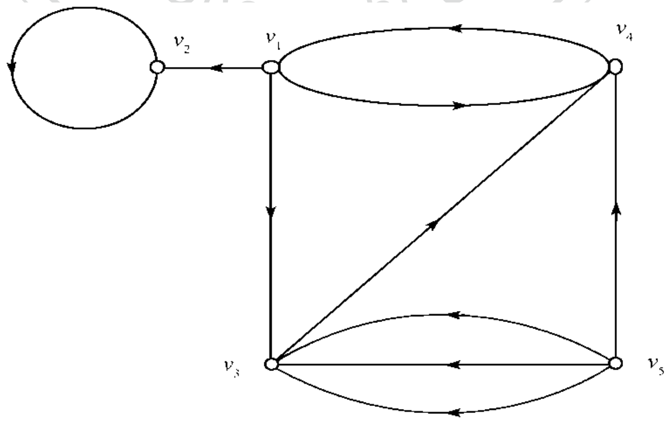

圖4.1

定義4.2 令 $D=\langle V,E\rangle$ 為有向圖。設 $v\in V$ 為有向圖是頂點。定義 $d^{+}(v)$ 為以 v 為始點的邊數，稱為頂點 v 的出度；定義 $d^{-}(v)$ 為以為終點的邊數稱為頂點的入度；

$d(c)=d^{+}(v)+d^{-}(v)$ 稱為頂點 v 的度數。

例4.2 如圖4.1， $d^{+}(v_1)=3,\ d^{-}(v_1)=1$ 。注意到 D 的每一條邊在計算頂點度數時都恰好被計算了兩次，我們有以下的握手定理：

定理4.1（握手定理）

如果 D 有 n 個頂點 m 條邊，則，

$$\sum_{k=1}^{n} d(v_k)=2m.$$

即所有頂點的度數之和等於邊數的兩倍。

在一個有向圖的頂點集和邊集都給定的情形下，我們可以給出其多種畫法。例如令 $D=\langle V,E\rangle$, 其中 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\},\ E=\{\langle v_1,v_2\rangle,\langle v_1,v_3\rangle,\langle v_2,v_3\rangle,\langle v_2,v_4\rangle,\langle v_4,v_1\rangle\}$ ，圖4.2所示的是其不同的畫法。

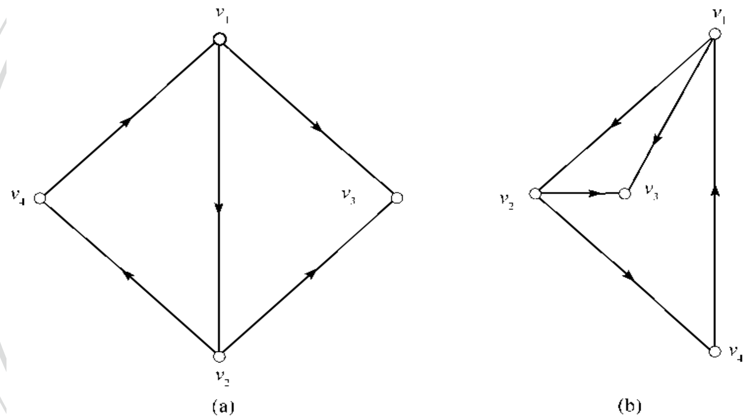

圖4.2

另外，我們所關心的往往是圖的結構，而其頂點和邊可以用不同的記號來標記。例如， 可以把一個圖的頂點標記爲 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 也可以簡單地標記成 $1,2,\cdots,n$ 。

兩個標記不同的圖完全可以有同一種畫法。例如，圖4.3即是兩種不同標記的同一個圖。

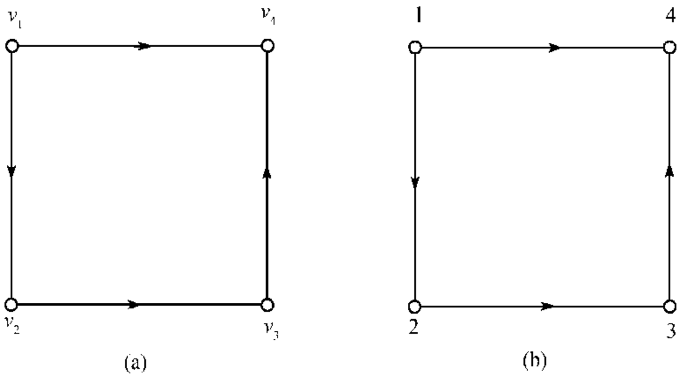

圖4.3

以上兩種情形的圖，稱爲同構的。

定義4.3 $D_1=\langle V_1,E_1\rangle$，$D_2=\langle V_2,E_2\rangle$ 設為有向圖。如果存在 V_1 到 V_2 的雙射函數 $g:V_1\to V_2$，滿足 $e=\langle V_i,V_j\rangle\in E_1$，$e'=\left\langle g(v_i),g(v_j)\right\rangle\in E_2$ 若且惟若並且 e 與 e' 的重數相同，則稱 D_1 與 D_2 同構。

很明顯，如果兩個圖同構，則它們的頂點數相同，邊數相同，具有同樣度數的頂點個數相同。但這些條件只是兩個圖同構的必要條件，而不是充分條件，因此，即使這些條件都滿足，兩圖也不一定是同構的。

在圖4.4中，(b)中 d，e，f 三點互不相鄰，而(a)中則找不到互不相鄰的3個頂點，所以(a)和(b)圖不同構。

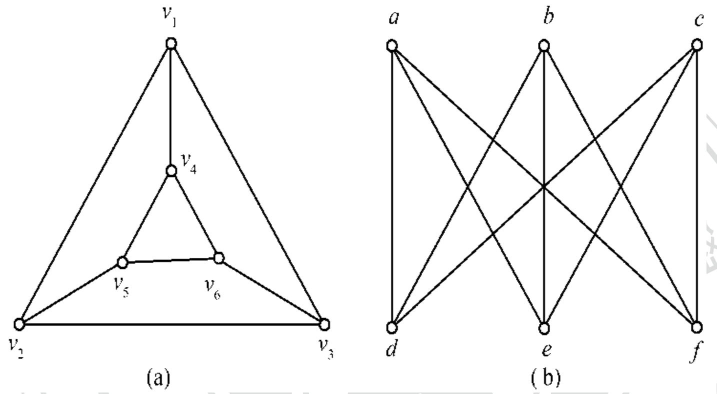

圖4.4

到目前爲止，還沒有判定兩個圖是否同構的簡便方法，只能根據同構的定義進行判定。

定義 4.4 設 $D=\langle V,E\rangle$ 為有向圖，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，其 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，如果頂點和邊的一個交替序列 $v_{i0},e_{j1},v_{i1},e_{j2},v_{i2},\cdots,e_{jk},v_{ik}$ 中，對 $p=1,2,...,k$，每個 e_{j_p} 都以 $v_{j_{p-1}}$ 為始點，以 v_{j_p} 為終點，其中 $i_0=i,i_k=j$ 則稱這個交替序列是一條由 v_i 到 v_j 的通路，記為 $L=L(v_{i0},e_{j1},v_{i1},e_{j2},v_{i2},\cdots,e_{jk},v_{ik})$，通路中邊的數目稱為該通路的長度，記為 $\|L\|$。當 $v_i=v_j$ 時，這條通路稱作回路。

如果一條通路中的所有頂點互不相同，則稱其爲初級通路或路徑。如果一條回路的所有頂點，除起、終點外，均不相同，則稱此回路爲初級回路或圈。

從定義可知，通路與回路都是圖的子圖，爲了弄清楚通路、回路及其分類的概念，在圖4.5中，給出了通路、回路的示意圖。(a)爲 v_0 到 v_4 長度爲4的初級通路(路徑)，當然它也是簡單通路。(b)爲 v_0 到 v_0 的長度爲5的初級回路(圈)，當然它也是簡單回路。在有向圖的通路或回路中，要注意邊上箭頭方向的一致性。

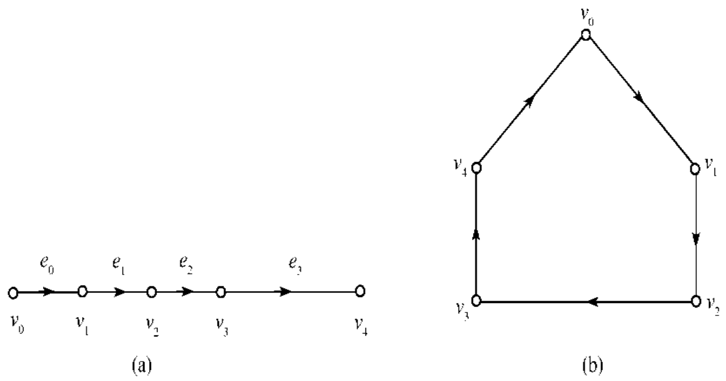

圖4.5

如果有向圖 D 不含平行邊，那麼 D 的所有邊 $A \le A^2$ 都由其起終點唯一確定。因此，表示通路的頂點與邊的交替序列可以簡化爲頂點序列

$$v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_k},$$

其中 $\langle v_{i_{p-1}}, v_{i_p}\rangle$, $(p=1,2,\ldots,k)$ 是 D 的邊。我們約定每一條起、終點不同的邊都是長爲1的初級通路，而每個自環都是長爲1的初級回路。我們稱無初級回路的有向圖爲無圈圖。

4.2 有向圖的連通性

設 $u,v \in V$ 是有向圖 $D=\langle V,E\rangle$ 的兩個頂點，如果存在 u 到 v 的通路，則稱頂點 u 可達頂點 v。我們規定任何頂點到自身總是可達的。容易驗證，有向圖頂點間的可達關係具有自反性和傳遞性，但通常不具有對稱性。

定義4.5 設 $u,v \in V$ 是有向圖 $D=\langle V,E\rangle$ 的兩個頂點。由 u 到 v 的距離 $d(u,v)$ 定義為：如果 $u=v$，則定義 $d(u,v)=0$；如果頂點 u 可達頂點 v，則定義 $d(u,v)$ 為 u 到 v 的通路中長度最短的通路(短程線)的長度；如果 u 不可達頂點 v，則定義 $d(u,v)=\infty$。

例4.3 如圖4.6所示，$d(v_1,v_1)=0$，$d(v_1,v_3)=1$，$d(v_1,v_4)=\infty$，$d(v_1,v_2)=1$，$d(v_2,v_1)=\infty$

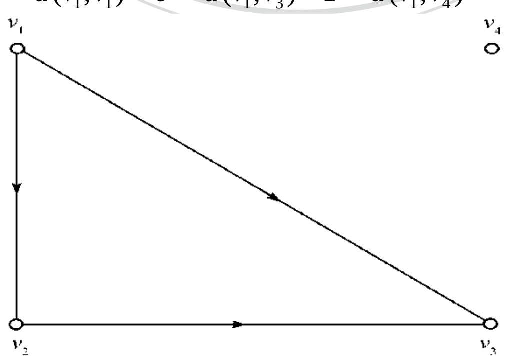

圖4.6

我們很容易驗證距離函數滿足下列性質：

(1) $d(u,v)\ge 0,\ \forall u,v \in V$，並且 $d(u,v)=0$ 若且惟若 $u=v$。

(2) $d(u,v)+d(v,w)\ge d(u,w)$對所有u,v,w成立。
一般地說，$d(u,v)\ne d(v,w)$。

定義4.6 設D為有向圖。如果頂點u可達v，並且v可達u，則稱u和v是強連通的。如果D的每對頂點都是強連通的，則稱D是強連通的。

例4.4 如圖4.7所示，該圖爲強連通的。

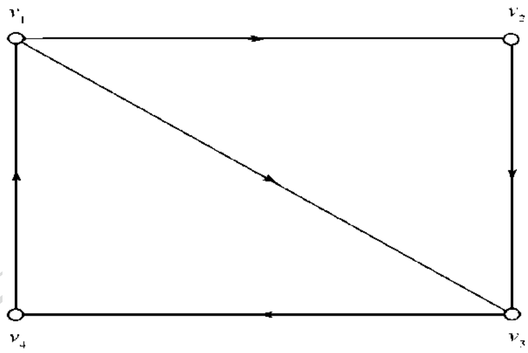

圖4.7

很明顯，按照上述定義，任何頂點都與其自身強連通。兩個不同頂點強連通的充分必要條件是存在一條回路同時經過這兩個頂點。

注意到有向圖的頂點之間的強連通關係是自反的，即任何頂點都與自身強連通；對稱的，即如果頂點u與v強連通，則v與u也強連通；傳遞的，即如果u與v強連通，並且v與w強連通，則u與w強連通。因此，強連通關係是頂點集上的一個等價關係。按照強連通關係，我們得到頂點集的強連通劃分，即存在頂點集V的非空子集$V_1,V_2,...,V_r$，滿足以下條件：

(1) $V=V1\cap V_2\cap\cdots\cap V_r$，

(2) 任給$i\ne j,\ 1\le i,j\le r,\ \mathrm{V}_i\cap\mathrm{V}_j=\phi$，

(3) 任給$u,v\in V$，u和v強連通的若且惟若 u和v同屬於某個V_k。

如果一個有向圖沒有非平凡強連通分支，我們約定其簡化縮略圖爲空集，有時也說其簡化縮略圖不存在。圖4.8 給出了一個有向圖及其縮略圖與簡化縮略圖。

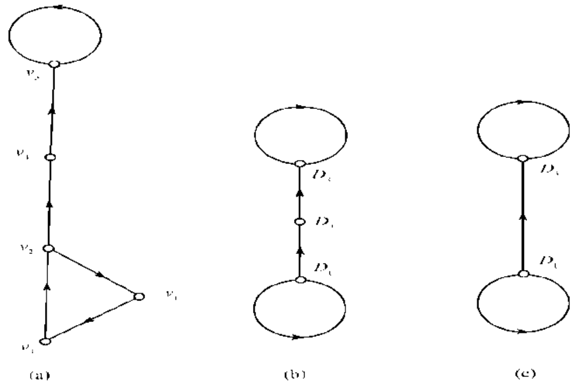

圖4.8

4.3 有向圖的鄰接矩陣

除了孤立頂點外，任意頂點都至少與一條邊相關聯，因此，任何有向圖，不考慮孤立頂點，可以由其邊集完全描述。例如，如果 D 的邊如下：

$$\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,4\rangle,$$

則圖4.9就是 D 的一個圖示。

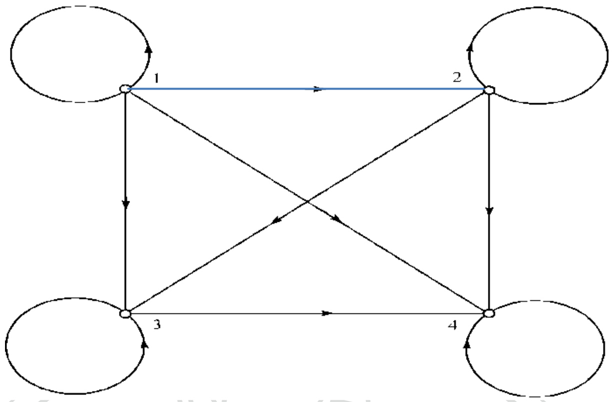

圖4.9

注意，我們是按照數字序列出 D 的邊，只不過這裡不是 a，b，c，…，而是 1，2，3，···。依照這種想法，我們可以用矩陣來完全地描述任何有向圖，這就是有向圖的鄰接矩陣。

定義4.7 設 $D=\langle V,E\rangle$。$A=(a_{ij})$，其中 a_{ij} 為 v_i 到 v_j 的平行邊的數目，$1\le i,j\le n$，為有向圖 D 的鄰接矩陣。

例4.5 圖4.9的鄰接矩陣可表示為

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

設 $D=\langle V,E\rangle$ 為有向圖，其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$A=(a_{ij})$ 是其鄰接矩陣。很明顯，a_{ij} 是 v_i 到 v_j 長度為1的通路數。我們自然關心的是，對任意給定的正整數 k 如何計算 v_i 到 v_j 長度為 k 的通路數。

例4.6 如圖4.10的鄰接矩陣可表示為

$$A(D)=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad,\qquad A^2=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&2&4&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad,\qquad A^4=\begin{pmatrix}1&2&6&4\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

觀察各矩陣發現，$a_{13}^2=3, a_{13}^3=4, a_{13}^4=6.$ 於是，D 中 v_1 到 v_3 長度爲 2 的通路有 3 條，長度爲 3 的通路 4 條，長度爲 4 的通路有 6 條。由於 $a_{11}^2=1, a_{11}^3=1, a_{11}^4=1.$ 可知，D 中 v_1 到自身長度爲 2， 3， 4 的回路各 1 條。由於 $\sum a_{ij}^2=10,$ 所以，長度爲 2 的通路總數爲 10，其中 3 條爲回路。

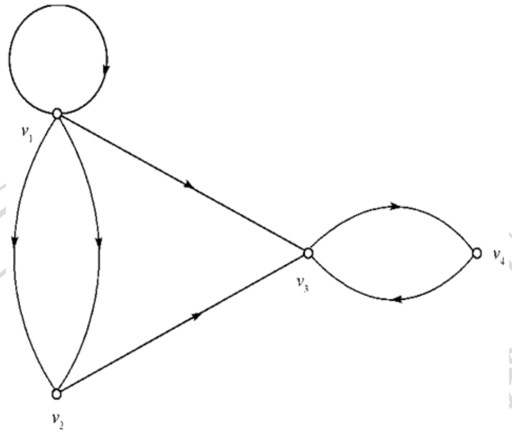

圖4.10

4.4 模糊矩陣的伴隨圖

本節引入模糊矩陣冪序列的圖學表示。我們將會看到，有了圖學工具後，研究冪序列的基本單元發生了質的變化：基本單元由單個元素 a_{ij} 升級爲初級回路。這種尺度上的差異帶來的變化是顯而易見的，基本單元尺度的增大使得我們可以把握問題的總體性質。

定義4.8 設 a_{ij} 為 $n\times n$ 模糊矩陣，稱有向標號的賦權圖 $D(A)=\langle V,E,W\rangle$ 為 A 的伴隨圖，其中 $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ 為 $D(A)$ 的頂點集，$E=\{\langle v_i,v_j\rangle \mid a_{ij}>0\}$ 為 $D(A)$ 的邊集，邊的賦權為 $w(\langle v_i,v_j\rangle)=a_{ij},\ \forall\langle v_i,v_j\rangle\in E$ 。 $D(A)$ 中的通路 $L\langle v_1,v_2,...,v_{l_{k-1}},...,v_j\rangle$ 的容量記為 $w(L\langle v_1,v_2,...,v_{l_{k-1}},...,v_j\rangle)$，或簡記 $w(L)$ 其中

$$w(L)=w\left(L\left\langle v_i,v_{l_1},\cdots,v_{l_{k-1}},v_j\right\rangle\right)=a_{il_1}\wedge a_{l_1l_2}\wedge\cdots\wedge a_{l_{k-1}j}.$$

例4.7 令

$$A=\begin{pmatrix}0&0.5&0&0.5&0\\0&0&0.4&0&0\\0&0&0&0.3&0\\0&0&0&0&0\\0.3&0&0&0.4&0\end{pmatrix}.$$

A 的伴隨圖 $D(A)$ 如圖4.11所示

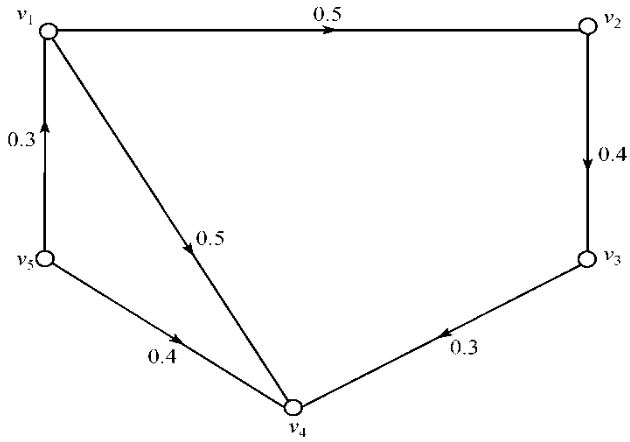

圖4.11

易見 $L=\langle v_1,v_2,v_3,v_4\rangle$ 是一條通路，有 $w(L)=0.5\wedge 0.4\wedge 0.3=0.3$ 。

由通路容量的定義立即有下列引理成立：

引理4.1 設圖 D 中的通(回)路 L 可分解為通(回)路 L_1 與 L_2 之和，則

$$w(L)=w(L_1+L_2)=w(L_1\wedge \mathrm{L}_2)\text{ 。}$$

該引理可以由定義直接證明。

模糊矩陣某些性質，如自反性和對稱性，在代數上有明確的表示而且易於驗證，而有些性質，如遞移性，在代數上則不太明顯，驗證起來也困難。這樣的性質從圖上或幾何上往往簡潔直觀。

例4.8 A的伴隨圖如圖4.12所示。圖中長爲2的初級通路只有 $\langle v_1,v_2,v_3\rangle$, 而且 $\langle v_1,v_3\rangle\in D(A)$, 所以 A是傳遞的。

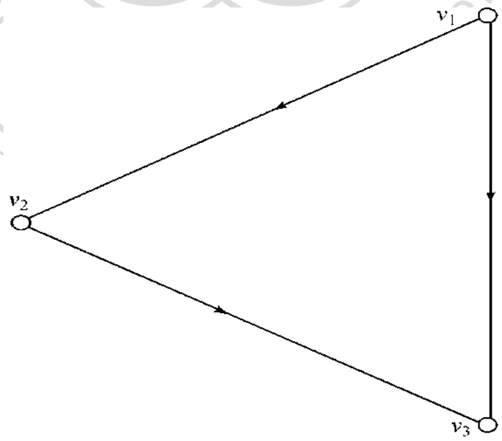

圖4.12

在可控矩陣的有關討論中，冪零矩陣起到了至關重要的作用但判定一個矩陣是否是冪零矩陣只能使用定義，計算量往往很大。從圖學的角度，冪零矩陣的伴隨圖有非常明確的圖學特徵，在圖上可以非常容易地判定它是否爲冪零。

引理4.2 設 A 為 n 階模糊矩陣，則 A 是冪零的若且惟若 A 的伴隨圖 $D(A)$ 中無回路。

證明充分性：假設 $A^m=0$，由矩陣乘法的結合律，對任意的正整數 k 都有 $A^{km}=0$。如果 $D(A)$ 中有回路，無妨 $L=\left\langle v_{l_0},v_{l_1},\cdots,v_{l_k}\right\rangle$ 設為 $D(A)$ 中一條回路，其中 $l_0=l_k$，且 $w(L)>0$。特別有 $w(mL)=w(L)>0$。因此 $a_{l_0l_0}^{k\,m}\ge w(mL)>0$，於是 $A^{km}>0$，矛盾，故 $D(A)$ 無回路。

必要性：如果 $D(A)$ 中沒有回路，$D(A)$ 中無長度大於或等於 n 的通(回)路，因此 $A^n=0$，即 A 是冪零的。 ❑

下面的定理說明模糊矩陣的冪序列與其伴隨圖之間的內在聯繫：

定理4.2 設 $A^k=(a_{ij}^k)_{n\times n}$ 為模糊矩陣 A 的冪序列。任給正整數 k，任給 $(i,j),\ 1\le i,j\le n$，令 $W(i,j,k)$ 為 v_i 到 v_j 長為 k 的所有通路構成的集合，則

$$a_{ij}^k=\begin{cases}0, & W(i,j,k)=\phi,\\ \max\limits_{L\in w(i,j,k)}\{w(L)\}, & \text{其他.}\end{cases}$$

定理4.2給出了模糊矩陣冪序列元素的一種直觀描述，我們不再把每個元素看作一些數值的簡單堆積，而是不同的點隨機聯繫在一起構成的通路。

爲方便起見，對任意 n 階模糊矩陣 A，我們都約定 $A^0=\left(a_{ij}^0\right)=I_n$，即 $a_{ij}^0=0,\ i\ne j,\ a_{ii}^0=1$。利用模糊矩陣冪序列的圖學表示，我們可以方便地建立它的另一種重要的代數表示。

定理4.3 設 $A^k=(a_{ij}^k)_{n\times m}$ 為模糊矩陣 A 的冪序列。任給正整數 $k\ge1$，任給 (i,j)，$1\le i,j\le n$，有

$$a_{ij}^k=\max_{1\le s\le n}\ \max_{1\le l_1,\cdots,l_{s-1}\le n} a_{il_1}\wedge a_{l_1l_2}\wedge\cdots\wedge a_{l_{s-1}j}\wedge a_{ii}^{k_0}\wedge a_{l_1l_1}^{k_1}\wedge\cdots\wedge a_{l_{s-1}l_{s-1}}^{k_{s-1}}\wedge a_{jj}^{ks},$$

其中 $k_0,k_1,...,k_s$ 為非負整數，且 $s+k_0+k_1+\cdots+k_s=k$。

證明：由定理4.2及通(回)路的分解式，無妨設 $a_{ij}^k=w\left(L_0+C_1+\cdots+C_{s+1}\right)$，
其中 L_0 爲 v_i 到 v_j 長爲 s 的初級通(回)路，C_t 爲過 L_0 的爲第 t 頂點長 k_t-1 的回路，且 $s+k_0+k_1+\cdots+k_s=k$，設 $w\left(L_0\right)=a_{il_1}\wedge a_{l_1l_2}\wedge\cdots\wedge a_{l_{s-1}j}$，則有

$$\begin{aligned}a_{ij}^k&=w\left(L_0+C_1+\cdots+C_{s+1}\right)=w\left(L_0\right)\wedge w\left(C_1\right)\wedge w\left(C_2\right)\wedge\cdots\wedge w\left(C_{s+1}\right)\\&\le a_{il_1}\wedge a_{l_1l_2}\wedge\cdots\wedge a_{l_{s-1}j}\wedge a_{ii}^{k_0}\wedge a_{l_1l_1}^{k_1}\wedge\cdots\wedge a_{l_{s-1}l_{s-1}}^{l_{s-1}}\wedge a_{jj}^{k_s},\end{aligned}$$

所以 $a_{ij}^k\le\max\limits_{1\le s\le n}\ \max\limits_{1\le l_1,\cdots,l_{s-1}\le n} a_{il_1}\wedge a_{l_1l_2}\wedge\cdots\wedge a_{l_{s-1}j}\wedge a_{ii}^{k_0}\wedge a_{l_1l_1}^{k_1}\wedge\cdots\wedge a_{l_{s-1}l_{s-1}}^{k_{s-1}}\wedge a_{jj}^{ks}.$

由定義，另一方向不等式顯然成立。 ❑

定義4.9 如果 $D(A)$ 是強連通的，則記 $D(A)$ 的所有回路長度的最大公因數為 $d(A)$，稱為 $D(A)$ 或 A 的回路指數。

例4.9 $D(A)$ 如圖4.13所示。顯然 $D(A)$ 是連通的。圖中的初級回路只有 $\langle v_1, v_2, v_4, v_1\rangle$, $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_1\rangle$ 和 $\langle v_3, v_4, v_3\rangle$, 長度分別爲3，4，2。我們有 $d(A) = \gcd(3,4,2) = 1$。

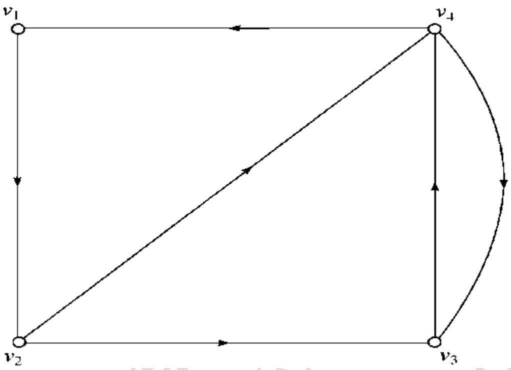

圖4.13

另外，我們約定 A 及其冪序列 A^k 的伴隨圖有相同的頂點集，在這一意義上，$D(A)$ 中的回路與 $D(A^k)$ 中的回路之間有著內在聯繫。設 $L\left(v_{l_0}, v_{l_1}, \cdots v_{l_{t-1}}, v_{l_0}\right)$ 是 $D(A)$ 的一條長爲 t 的回路。對任意給定的 $k > 1$，令 t_1 爲 k 與 t 的最大公因數，$t_2 = \dfrac{t}{t_1}$, 則 L 在 $D(A^k)$ 中可分解爲 t_1 條長爲 t_2 的不相關的回路。

$$L_1\left(v_{l_0}, v_{l_{t_1}}, \cdots v_{l_{t_2(t_1-1)}}, v_{l_0}\right)$$
$$L_2\left(v_{l_1}, v_{l_{t_1+1}}, \cdots v_{l_{t_2(t_1-1)+1}}, v_{l_1}\right)$$
$$\cdots\cdots$$
$$L_{t_1}\left(v_{l_{t_1-1}}, v_{l_{2t_1-1}}, \cdots v_{l_{t-1}}, v_{l_{t_1-1}}\right)$$

例4.10

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

在此例中，$k = 4,\ t = 6,\ t_1 = 2,\ t_2 = 3$。$D(A)$ 中的回路 $L = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1\rangle$ 分解爲 $D(A^4)$ 中兩條不相關的回路 $L = \langle v_1, v_5, v_3, v_1\rangle$ 和 $L = \langle v_2, v_6, v_4, v_2\rangle$ (見圖4.14)。

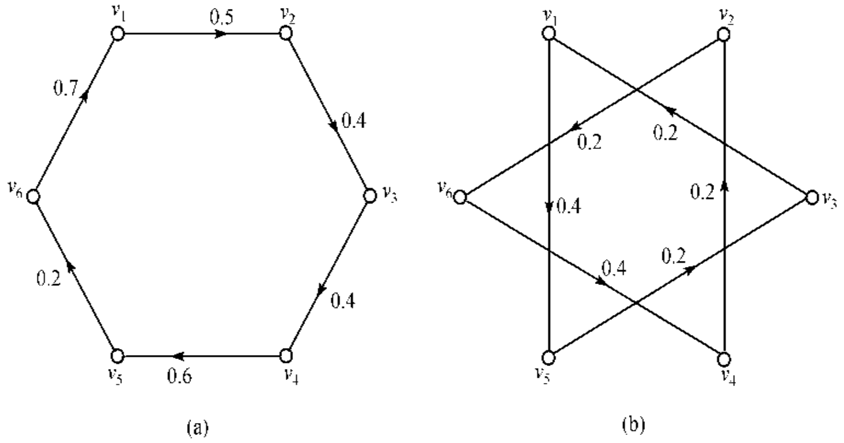

圖4.14

4.5 模糊矩陣分解定理

定理4.4（分解定理） 設 A 和 B 為 $n\times n$ 模糊矩陣，則對任意給定的 $\lambda\in[0,\ 1]$，有

（1） $A=\max_{\lambda\in\Phi_A}\lambda A_\lambda$ 。

（2） $(AB)_\lambda=A_\lambda B_\lambda$ 。

（3） $(A^k)_\lambda=(A_\lambda)^k=A_\lambda^k$, $A^k=\max\limits_{\lambda\in\Phi_A}\lambda A_\lambda^k$ 。

證明：(1) 是顯而易見的，我們只證明(2)，(3)是(1)和(2)的直接推論。
任給 $\lambda\in[0,\ 1]$，

$$\begin{aligned}&[(AB)_\lambda]_{ij}=0\Leftrightarrow\max_{1\le k\le s}a_{ik}\wedge b_{kj}<\lambda\\&\Leftrightarrow\max_{1\le k\le s}[A_\lambda]_{ik}\wedge[B_\lambda]_{kj}=0\\&\Leftrightarrow[A_\lambda B_\lambda]_{ij}=0\end{aligned},$$

我們有

$$(AB)_\lambda=A_\lambda B_\lambda. \qquad ❑$$

儘管看起來簡單,定理4.4不失爲是討論模糊矩陣冪序列的一個最基本的定理。定理4.4的第3部分是其核心部分，有了它，我們就可以把幾乎所有有關布林矩陣或非負矩陣冪序列的結果平行移植到模糊矩陣上來。事實上，定理的前兩部分早已爲人所熟知，只是由於各式各樣的原因沒有注意到第3個式子及其重要性罷了。

例4.11 令

$$A=\begin{pmatrix}0.2&0.3&0.4\\0&0&0.2\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

易見 $\Phi_A=\{0.2,0.3,0.4\}$ 。我們有

$$0.2A_{0.2}\vee 0.3A_{0.3}\vee 0.4A_{0.4}$$
$$=0.2\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\vee 0.3\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\vee 0.4\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A.$$

$$0.2A_{0.2}^2\vee 0.3A_{0.3}^2\vee 0.4A_{0.4}^2$$
$$=0.2\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\vee 0.3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\vee 0.4\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A^2.$$

定理4.5 設 A 為 n 階模糊矩陣，則

（1） $K_A=\max\limits_{\lambda\in\Phi_A}\{K_{A_\lambda}\}$，

（2） $P_A=\operatorname{lcm}\limits_{\lambda\in\Phi_A}\{P_{A_\lambda}\}$。

也就是說模糊矩陣的收斂指數等於其水準截矩陣收斂指數的最大值，而模糊矩陣的週期指數等於其水準截矩陣週期指數的最小公倍數。因此，模糊矩陣的分解定理實際上對模糊矩陣的冪序列問題與布林矩陣冪序列問題之間的橋樑發生了作用。

定理4.5的證明：任給 $\lambda\in\Phi_A$，由

$$A^{K_A+P_A}=A^{K_A}\ ,$$

及分解定理有

$$A_\lambda^{K_A+P_A}=A_\lambda^{K_A}$$

因此有

$$K_A\geq K_{A_\lambda},P_{A_\lambda}\mid P_A$$

由 λ 的任意性有

$$K_A\geq K,P\mid P_A\ 。$$

另一方面，注意到如果 $A^{k+p}=A^k$，則對任意的 $k_1\geq k,p\mid p_1$，都有 $A^{k_1+p_1}=A^{k_1}$ 我們有

$$A_\lambda^{K+P}=A_\lambda^K,\forall\lambda\in\Phi_A$$

由分解定理 $A^{K+P}=\max\limits_{\lambda\in\Phi_A}\lambda A_\lambda^{K+P}=\max\limits_{\lambda\in\Phi_A}\lambda A_\lambda^K=A^K$ 。

所以 $K_A\leq K,P_A\mid P$ 。 ❑

例4.12

$$A=\begin{pmatrix}0.2 & 0.6 & 0\\ 0 & 0.4 & 0\\ 0.6 & 0.4 & 0\end{pmatrix},\quad A_{0.2}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A_{0.4}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad A_{0.6}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

計算得 $K_{A_{0.2}}=1, K_{A_{0.4}}=2, K_{A_{0.6}}=3$，所以 $K_A=\max[1,2,3]=3$。

例4.13

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0.3\\ 0.4 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad A_{0.2}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A_{0.3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad A_{0.4}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因爲 $P_{A_{0.2}}=3, P_{A_{0.3}}=1, P_{A_{0.4}}=1$，所以 $P_A=\mathrm{lcm}[3,1,1]=3$。

5.結論

近年來由於智能科技發展一日千里，研究方法亦不斷的更新。傳統統計分析工具已漸感到不敷應用。一個主要的原因是：如何更有效處理分析日益複雜，鉅量的網路情報資料。雖然資料採礦的興起，解決了不少資料分析的問題。但是對於如何處理非實數樣本資料，比如區間資料，多值資料型式之模糊樣本，應用架構在實變函數與機率論之傳統統計方法，實在已無法有效的分析與掌控。尤其是我們在決策過程中所遇到的不確定性問題比我們想像的更爲複雜。情報資訊除了隨機性外，還包括不完全的信息，部分已知的知識，或者對環境模糊的描述等。

事實上，我們所獲得的信息來自測量與感知，而感知信息中的不確定因素，主要是我們的語言對某些概念表達模糊所引起的。顯然要做出比較好的判斷，我們必須盡量將所能得到的信息都考慮在內。這包括用自然語言描述的行爲、意義等之屬性信息。因此我們需要用機率將模糊概念數學模式化，其實這也展示了不確定性的另一種型式。模糊理論是一種定量化處理人類語言，思維的一個新興學門。模糊邏輯並非如字面上意思那樣的馬虎，不精確。而是面對生活上各種的不確定性，以更合理的規則去分析去管理控制，以期得到更有效率，更合乎人性與智慧的結果。模糊統計並不模糊，它是處理不確定事件的新技術，帶領我們從古典的統計估計與檢定研究計算，進入一個需要軟計算，穩健性的高科技的 e 世代。

本研究中模糊矩陣的圖學表示和模糊矩陣的分解定理是探討模糊矩陣極限性質的兩大主要工具。我們可用這兩個工具討論任意模糊方陣冪序列收斂的充分必要條件以及矩陣的收斂指數和週期指數。和以往最大的不同在於，我們的著眼點不再局限於特殊的模糊矩陣，而是開始建立 $\max-\min$ 複合意義下一般的模糊矩陣極限理論，是未來將研究的課題。

最後，當今許多真實世界問題，如投資組合的選擇問題和選擇權的評價問題或熱傳導問題，都是要尋找線性系統的解法。然而，決定明確的輸入數據是非常困難的。因此，線性系統方程式經常是不明確的，通常是利用模糊算法求解。現今，在模糊集合定理下，尋找不精確的參數線性系統的適當解法，變成一個重要的議題，也是未來將研究的方向。

參考文獻

[1]吳柏林(2003)，現代統計學，五南書局，台北。

[2]吳柏林(2005)，模糊統計導論-方法與應用，五南書局，台北。

[3]吳柏林(1996)，社會科學研究中的模糊邏輯與模糊統計分析，中國統計通訊 7(11)，14-27。

[4]吳柏林，楊文山(1997)，模糊統計在社會調查分析的應用，社會科學計量方法發展與應用，楊文山主編：中央研究院中山人文社會科學研究所，289-316。

[5]阮亨中，吳柏林(2000)，模糊數學與統計應用，俊傑書局，台北。

[6]林信成，彭啓峰(1994)，Oh！Fuzzy 模糊理論剖析，第三波文化事業股份有限公司。

[7]Cano, J.C. and Nava, P.A. (2002), A fuzzy method for automatic generation of membership function using fuzzy relations from training examples, 2002 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society Proceedings, pp.158-62.

[8]Czogala, E., Drewniak, J. and Pedrycz, W. (1982), Fuzzy relation equations on a finite set, Fuzzy Sets and Systems, 7, pp.89–101.

[9]Fang, S.-C and Li, G. (1999), Solving fuzzy relation equations with a linear objective function, Fuzzy Sets and Systems, 103(1), pp.107-113.

[10]Hung, T., Ngyyen and Wu, B. (2006), Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data, Spring-Verlag.

[11]Kosko, B. (1993), Fuzzy thinking: the new science of fuzzy logic, Hyperion, New York.

[12]Luoh, L., Wang, W.J. and Liaw, Y.K. (2003), Matrix-pattern-based computer algorithm for solving fuzzy relation equations, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 11(1), pp.100-108.

[13]Wu, B. and Sun, C. (1996), Fuzzy statistics and computation on the lexical semantics, Language, Information and Computation (PACLIC 11), 337-346, Seoul, Korea.

[14]Zadeh, L.A. (1965), Fuzzy Sets, Information and Control, 8, 338-353.

[15]Zimmermann, H.J. (1991), Fuzzy Set Theory and Its Applications, Boston: Kluwer Academic.