中國統計學報
第33卷第3期
八十四年九月
355–371頁

貝氏A最適設計和Γ-minmax設計及其穩健性之探討

丁兆平　楊玉韻

國立政治大學統計研究所

摘要

本文主要是推廣Majumdar (1992)之結果至任何k, v組合之集區設計,以研究當有先前資訊可供使用時,比較v個試驗處理與一個對照處理之問題,並找出貝氏A最適設計和Γ-minimax設計,以及印證Owen (1970)所提出之方法。文中並將針對二個先前參數來探討貝氏A最適設計和Γ-minimax設計之穩健性,以及探討平衡處理集區設計之最適性與穩健性。

關鍵詞：A最適設計,貝氏設計,集區設計,平衡處理集區設計,貝氏A最適設計,Γ-minimax設計,穩健設計。

美國數學會分類索引：主要62K05;次要62K10。

1. 前言

試驗處理(test treatment)與對照處理(control treatment)相互比較之實驗,在工業、農業和醫藥界中均已廣爲使用。假設現有v個試驗處理,分別標示爲$1, 2, \cdots, v$,和一個對照處理,標示爲0,且實驗之架構爲集區設計(block design)。令τ_i表處理i, $i = 0, 1, \cdots, v$,之效果(effect),本文有興趣估計的差比(contrast)爲$\tau_i - \tau_0$, $i = 1, 2 \cdots, v$,亦即試驗處理-對照處理之差比,這些差比的估計量所採用的是最佳線性不偏估計量(best linear unbiased estimator) $\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_0$。由於這些估計量會受到$v + 1$個處理在實驗中之配置的影響,所以本文主要的目的是找到一種所謂最佳的配置方法,以致於使得這些差比的估計量之變異數的某一函數值爲最小,本文所採用的函數爲$\sum_{i=1}^{v} \text{Var}\ (\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_0)$,亦即所謂的$A$最適($A$-optimality)。有關$A$最適集區設計之文獻已相當的多,有興趣的讀者可參閱Hedayat et al. (1988)。

由於對照處理通常都是已做過實驗之處理,再加上現代儲存資訊技術的進步,一般對於對照處理會有許多先前資訊(prior information)可以使用,如此在固定之總實驗單位(experimental units)之下,便可以減少對照處理之實驗單位,並將減少之實驗單位用於新的v個試驗處理上,進而增加實驗的效率(efficiency)。此種應用先前資訊的設計,一般稱之爲貝氏實驗設計(Bayes experimental design)。

貝氏實驗設計最早由Owen (1970)所提出,根據其理論架構繼而推廣的有Giovagnoli and Verdinelli (1983, 1985)。然而上述之文獻均是在「近似設計理論」(approximate design theory)架構之下,亦即n_{ij}(處理i在集區j中出現之個數)爲實數,然而當這些設計應用到真實之實驗時,必須經過「四捨五入」或是其他「入」或「捨」的步驟方能使用,可是經過此一步驟後所得之設計,是否依然爲最適設計,則無從得知。

基於這層考量, Majumdar (1988)從而由「準確設計理論」(exact design theory),亦即n_{ij}爲整數的觀點著手。在當k(集區大小)$< v$時,用一相當簡單的常態先前資訊之假設找出貝氏A最適設計(Bayes A-optimal design)。Stufken (1991)延續Majumdar (1988)的方法,找出一大族群之貝氏A最適設計,並將常態之先前資訊的假設,推廣到模糊先前資訊(vague prior)。Majumdar (1992)

則再進一步推廣先前資訊分配之假設,找出貝氏 A 最適設計和 Γ-minimax 設計。

本文亦是以準確設計理論為基礎,推廣 Majumdar (1992) 至所有 k, v 組合之情形,亦即對任意之 v, b (集區個數) 及 k 值,找出貝氏 A 最適設計和 Γ-minimax 設計,所得之結果不僅可以適用於 $k > v$ 之情形,$k \leq v$ 時亦可。同時,Owen (1970) 之結果,在當 $k > v$ 時,亦由本文之方法所證實。文中將提供二例。

設計穩健性 (robustness) 亦是研討貝氏設計的另一重要課題,本文所指之穩健性,係指當對照處理之先前資訊有所偏離時,最適之 r_0 (對照處理在設計中出現之總次數) 值仍維持不變而言。由於探討設計穩健性之過程非常複雜,故 Majumdar (1992) 只針對一個先前參數 (prior parameter) 來討論。本文將擴大到對兩個先前參數,來討論貝氏 A 最適設計和 Γ-minimax 設計之穩健性,並且由表列之穩健設計之先前資訊之範圍中,可看出平衡處理集區設計 (balanced treatment block design),除本身之最適性外,亦是相當穩健的設計。

本文之結構如後:第 2 節為背景介紹;尋找貝氏 A 最適設計和 Γ-minimax 設計之充分條件,將在第 3 節中給出,Owen (1970) 結果之確定亦放在第 3 節中;第 4 節為貝氏 A 最適設計和 Γ-minimax 設計之穩健性之探討;第 5 節為範例。本文僅將主定理、相關引理,和穩健設計之表格列出,至於導至主定理之其它不直接相關之定理和引理,以及所有之證明,請見 Ting and Yang (1993)。

2. 背景

令 $D(v+1, b, k)$ 表具有 b 個大小為 k 之集區,且有 $v+1$ 個試驗處理配置其中之所有集區設計之集合。假設設計 d 之模型如下:

$$Y_{ijl} = \theta_i + \zeta_j + \varepsilon_{ijl},$$

其中

Y_{ijl} = 處理 i 在第 j 個集區中第 l 個位置 (plot) 之觀測值,$l = 1, \cdots, k$;

$\theta_i = \tau_i - \tau_0,\ i = 0, \cdots, v$;

$\zeta_j = \mu + \tau_0 + \beta_j$, 對照處理在集區 j 中之效果,$j = 1, \cdots, b$;

β_j = 集區 j 之效果;

τ_i = 處理 i 之效果;

ε_{ijl} = 期望值爲0,變異數固定爲 σ^2 之隨機誤差(random error)。

則上述之模型可改寫成下列之矩陣形式:

$$\vec{Y} = \boldsymbol{X}_{1d}\vec{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{X}_2\vec{\boldsymbol{\zeta}} + \vec{\varepsilon},$$

其中 $\vec{\boldsymbol{\theta}} = (\theta_1, \cdots, \theta_v)$, $\vec{\boldsymbol{\zeta}} = (\zeta_1, \cdots, \zeta_b)$。令 $\vec{Y}$ 之排列方式以集區爲單位,亦即 $\vec{Y}$ 之觀測值之排列順序爲第一個集區之觀測值,第二個集區之觀測值,然後至第 b 個集區之觀測值,如此 $\boldsymbol{X}_{1d} = ((\delta_{hi}))$,爲一 $bk \times v$ 之矩陣,$\delta_{hi} = 1$ 當第 h 個觀測值爲使用試驗處理 i, $i = 1, \cdots, v$,否則 $\delta_{hi} = 0$;

$$\boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} \vec{1}_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vec{1}_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \vec{1}_k \end{pmatrix}$$

爲一 $bk \times b$ 之矩陣,$\vec{1}_k$ 爲元素均爲1之 $k \times 1$ 向量。

假設誤差之分配和參數之先前分配均爲常態分配,亦即

$$\vec{Y}|\vec{\boldsymbol{\theta}}, \vec{\boldsymbol{\zeta}} \sim N(\boldsymbol{X}_{1d}\vec{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{X}_2\vec{\boldsymbol{\zeta}}, E),$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{\theta}} \\ \vec{\boldsymbol{\zeta}} \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{\theta}} \\ \vec{\boldsymbol{\zeta}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{T} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\right),$$

則根據貝氏定理,$\vec{\boldsymbol{\theta}}$ 之後續分配(posterior distribution)爲

$$\vec{\boldsymbol{\theta}}|\vec{\boldsymbol{y}},\ \boldsymbol{T},\ \boldsymbol{B} \sim N(\vec{\boldsymbol{\mu}}_d, \boldsymbol{C}_d^{-1}),$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_d &= \boldsymbol{X}'_{1d}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}'_2)^{-1}\boldsymbol{X}_{1d} + \boldsymbol{T}^{-1}, \\ \boldsymbol{C}_d\vec{\boldsymbol{\mu}}_d &= \boldsymbol{X}'_{1d}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}'_2)^{-1}(\vec{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{X}_2\vec{\boldsymbol{\mu}}_\zeta) + \boldsymbol{T}^{-1}\vec{\boldsymbol{\mu}}_\theta \text{ 。} \end{aligned}$$

在平方誤差損失(squared error loss) $L(\hat{\vec{\boldsymbol{\theta}}}, \vec{\boldsymbol{\theta}}) = (\hat{\vec{\boldsymbol{\theta}}} - \vec{\boldsymbol{\theta}})'(\hat{\vec{\boldsymbol{\theta}}} - \vec{\boldsymbol{\theta}})$ 之下,$\vec{\boldsymbol{\theta}}$ 之貝氏估計量爲 $\vec{\boldsymbol{\mu}}_d$,其後續期望損失(posterior expected loss)爲 trace $\boldsymbol{C}_d$(標示爲 $tr(\boldsymbol{C}_d)$)。一般文獻所採用之貝氏最適設計 d^* 之定義如下:

$$tr(C_{d^*}^{-1}) = \min_{d \in D(v+1,b,k)} tr(C_d^{-1}) \text{ 。} \tag{2.1}$$

由於上述之定義和 A 最適設計之定義相當類似，故 d^* 又稱之爲貝氏 A 最適設計。

爲了繼續研究 $tr(C_d^{-1})$，我們對 C_d^{-1} 中之 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 矩陣之假設如下：

$$\boldsymbol{E} = \{((1-\gamma_1)\boldsymbol{I}_k + (\gamma_1 - \gamma_2)\boldsymbol{J}_k) \otimes \boldsymbol{I}_b + \gamma_2 \boldsymbol{J}_{bk}\}\sigma^2, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{T} = \nu \boldsymbol{I}_v \sigma^2, \quad \boldsymbol{B} = a\boldsymbol{I}_b \sigma^2, \tag{2.3}$$

其中 $\boldsymbol{J}_n$ 爲元素均爲 1 之 $n \times n$ 矩陣，$\otimes$ 爲 Kronecker product，且 $-1 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$, $a, \nu > 0$ 。上述先前變異數之假設所適用之情況相當廣，因爲在此假設之下表示：試驗處理效果具互換性 (exchangeability)，且相互獨立，對照處理在集區中之效果具互換性，且相互獨立 。則根據 Owen (1970) 和下列條件成立之下：

$$a + (\gamma_1 - \gamma_2) \neq 0,$$

$$1 - \gamma_1 + k(\gamma_1 - \gamma_2) + ka \neq 0,$$

$$1 - \gamma_1 + k(\gamma_1 - \gamma_2) + ka + bk\gamma_2 \neq 0,$$

可得

$$\begin{aligned} \sigma^2(1-\gamma_1)\boldsymbol{C}_d &= \operatorname{diag}(r_{d1}, \cdots, r_{dv}) - (k+p)^{-1}\boldsymbol{N}_d\boldsymbol{N}'_d - q\vec{\boldsymbol{r}}_d\vec{\boldsymbol{r}}'_d \\ &\quad + \sigma^2(1-\gamma_1)\boldsymbol{T}^{-1}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中

$$p = (1-\gamma_1)(a + (\gamma_1 - \gamma_2))^{-1},$$

$$q = \gamma_2(1-\gamma_1)(1-\gamma_1+k(\gamma_1-\gamma_2) + ka)^{-1}(1 - \gamma_1 + k(\gamma_1 - \gamma_2) + ka + bk\gamma_2)^{-1},$$

$$r_{di} = \sum_{j=1}^{b} n_{dij}, \ \vec{\boldsymbol{r}}'_d = (r_{d1}, \cdots, r_{dv}),$$

$\boldsymbol{N}_d = ((n_{dij})) = v \times b$ 之試驗處理對集區之係數矩陣 (incidence matrix) 。

由於完全對稱之 $\boldsymbol{C}_d$ 具有某種程度之最適性，故本文將著重於探討具有完全對稱之 $\boldsymbol{C}_d$ 之特殊設計的貝氏最適性，茲將該設計之定義如後：

<u>定義 **2.1**:</u>若設計 d 符合下列之條件，則稱 d 爲平衡處理集區設計 (Balanced Treatment Block Design, BTBD) 。

$$\lambda_{d01} = \cdots = \lambda_{d0v} = \lambda_0,$$
$$\lambda_{d12} = \cdots = \lambda_{dv-1,v} = \lambda_1,$$

其中 $\lambda_{dii'} = \sum_{j=1}^{b} n_{dij} n_{di'j}, \forall i \neq i'$ 。

本文中我們有興趣探討的是平衡處理集區設計中的一些特殊設計,這些設計之最適性在沒有先前資訊之情況下,已廣被證明 。其定義如下:

定義 **2.2:**若設計 d 爲平衡處理集區設計,且符合下列之條件,則 d 標示爲 BTBD(v, b, k; t, s) 。

(i) $n_{d01} = \cdots = n_{d0s} = t+1$, $n_{d0,s+1} = \cdots = n_{d0b} = t$,

(ii) $|n_{dij} - n_{di'j'}| \leq 1$, $(i,j) \neq (i',j')$, $i, i' = 1, \cdots, v$, $j, j' = 1, \cdots, b$ 。

3. 貝氏最適設計和 Γ-minmax 設計

令 $\eta = (1-\gamma_1)/\nu$, $U = by - z$, $V = by^2 - 2yz + z$, $h(y,z) = -bv[U/bv]^2 + (2U - bv)[U/bv] + U$,其中 y 和 z 爲非負整數,$[\cdot]$ 代表最大整數函數,且 $r_0 = b(k-y)+z$,令

$$\begin{aligned} g(y,z) &= \frac{v(v-1)^2(k+p)}{(v-1)(k+p)U - vh(y,z) + v + v(v-1)(k+p)\eta} \\ &\quad + \frac{v(k+p)}{(k+p)U - q(k+p)U^2 - v + v(k+p)\eta}, \\ \triangle &= \{(y,z) : y = [(k+p+1)/(2(bq(k+p)+1))] + 1, \cdots, k, z = 0, \cdots, b\} \text{ 。} \end{aligned}$$

假設先前資訊之範圍爲

$$\Gamma = \{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{B}; 0 \leq \boldsymbol{T} \leq \nu \boldsymbol{I}\sigma^2,\ 0 \leq \boldsymbol{B} \leq a\boldsymbol{I}\sigma^2\}, \tag{3.1}$$

其中"$\leq$"表矩陣間之非負定排序(nonnegative definite ordering) 。則設計 d 之 Γ-minimax rule 之風險(risk)爲 $tr\boldsymbol{C}_d^{-1}(\Gamma)$,而

$$\boldsymbol{C}_d(\Gamma) = \boldsymbol{X}_{1d}'(\boldsymbol{E} + a\sigma^2 \boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{X}_2')^{-1} \boldsymbol{X}_{1d} + (\nu_1\sigma^2)^{-1}\boldsymbol{I} \text{ 。}$$

所謂的 Γ-minmax 設計 d^* 爲風險最小之設計,亦即

$$tr\boldsymbol{C}_{d^*}^{-1}(\Gamma) = \min_{d \in D(v+1,b,k)} tr\boldsymbol{C}_d^{-1}(\Gamma) \text{ 。} \tag{3.2}$$

由(2.1)和(3.2)可看出，在(2.2), (2.3), (3.1)和 $0 \le \gamma_2 \le \gamma_1 < 1$ 之情形下，若 d^* 爲貝氏 A 最適設計，則其亦爲 Γ-minmax 設計。

定理 **3.1:** 若(2.2), (2.3)和(3.1)成立，和 $0 \le \gamma_2 \le \gamma_1 < 1$，則

(1)設 $(k+p+1)/(2(bq(k+p)+1)) < k$，且 $g(y^*, z^*) = \min\{g(y,z) : (y,z) \in \triangle\}$，則若 BTBD$(v, b, k; k-y^*, z^*)$ 存在時，該設計爲貝氏 A 最適設計，同時亦爲 Γ-minimax 設計，

(2)若 $(k+p+1)/(2(bq(k+p)+1)) \ge k$，且 BTBD$(v, b, k, 0, 0)$ 存在時，該設計爲貝氏 A 最適設計，同時亦爲 Γ-minimax 設計。

註:BTBD$(v, b, k; 0, 0)$ 表 $r_0 = 0$ 之平衡處理集區設計。亦即當 $(k+p+1)/(2(bq(k+p)+1)) \ge k$ 時，貝氏 A 最適設計和 Γ-minimax 設計是純粹以 v 個試驗處理爲主之平衡集區設計(balanced block design)，無須放入對照處理。

爲了簡化後面探討設計穩健性之過程，我們將先前變異數之假設進一步精簡爲: $\nu \to \infty$，代表 v 個試驗處理爲新的，且沒有經過任何實驗過程之處理，故相較於對照處理，我們對這新的 v 個試驗處理之先前資訊相當"模糊"; $0 \le \gamma_1 < 1$, $\gamma_2 = 0$，表示誤差在集區間不具有相關性，但在集區內爲正相關。上述之假設較 Majumdar (1992) 爲廣，他在該文之假設爲，誤差不僅在集區間不具有相關性，在集區內亦然，亦即 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$。在上述之精簡之先前變異數之假設之下，我們可得較簡化之引理 3.1。

引理 **3.1:** 若 $\boldsymbol{E} = ((1-\gamma_1)\boldsymbol{I}_k + \gamma_1 \boldsymbol{J}_k) \otimes \boldsymbol{J}_b \sigma^2$, $0 \le \gamma_1 < 1$; $\boldsymbol{B} = a\boldsymbol{I}_b\sigma^2$; $\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{O}_v$，且 $\Gamma = \{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{B}; \boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{O}_v,\ \boldsymbol{O}_b \le \boldsymbol{B} \le a\boldsymbol{I}_b\sigma^2\}$ 其中 $\boldsymbol{O}_v$ 表 $v \times v$ 之零矩陣。令

$$\begin{aligned} g_0(y,z;\omega) &= (v(v-1)^2(k+\omega^{-1}))((v-1)(k+\omega^{-1})U - vh(y,z) + v)^{-1} \\ &\quad + (v(k+\omega^{-1}))((k+\omega^{-1}U - v)^{-1}, \end{aligned}$$

且 $\triangle_0(\omega) = \{(y,z) : y = [(k+\omega^{-1}+1)/2]+1, \cdots, k;\ z = 0, \cdots, b\}$, $\omega = (a+\gamma_1)/(1-\gamma_1)$。

(1)若 $\omega > 1/(k-1)$，且 $g_0(y^*_\omega, z^*_\omega; \omega) = \min\{g_0(y,z;\omega) : (y,z) \in \triangle_0(\omega)\}$，則 BTBD $(v, b, k; k-y^*_\omega, z^*_\omega)$ 若存在，該設計爲貝氏 A 最適設計，同時亦爲 Γ-minimax 設計，

(2)若$\omega \le 1/(k-1)$,且BTBD $(v,b,k,0,0)$存在時,則該設計爲貝氏A最適設計,同時亦爲Γ-minimax設計。

在探討設計穩健性和印證Owen之結果之前,我們先探討$g_0(y,z,\omega)$。由Jacroux and Majumdar (1989)我們可看出使$g_0(y,z,\omega)$最小之(y,z)值,若非爲唯一解(y^*_ω,z^*_ω),即爲(y^*_ω,z^*_ω)或$(y^*_\omega,z^*_\omega+1)$。因$r_0=b(k-y)+z$,故對所有之$\omega$,我們定義最適之$r_0$值爲$r_0^*(\omega)$,亦即

$$\begin{aligned}
r_0^*(\omega) &= b(k-y^*_\omega)+z^*_\omega,\ \text{如}\ g_0(y^*_\omega,z^*_\omega;\omega)=\min_{(y,z)\in\triangle_0} g_0(y,z;\omega);\\
r_0^*(\omega) &= b(k-y^*_\omega)+z^*_\omega\ \text{或}\ b(k-y^*_\omega)+z^*_\omega+1,\text{如}\ g_0(y^*_\omega,z^*_\omega;\omega)\\
&= g_0(y^*_\omega,z^*_\omega+1;\omega)=\min_{(y,z)\in\triangle_0} g_0(y,z;\omega)\ 。
\end{aligned}$$

將引理3.1中之$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{B}$代入Owen (1970)的方法,可得當$\omega \ge \sqrt{v}/k$,最佳之n_{ij}爲$(k+\omega^{-1})/(v+\sqrt{v})$,最佳之$n_{0j}$爲$k-vn_{ij}$, $i=1,\cdots,v$; $j=1,\cdots,b$。故在適當之k, v, w組合下,當n_{ij}和n_{0j}爲整數時, Owen之方法應可被上述引理3.1所印證。由下列二例可看出的確如此。

<u>例**3.1**:</u>當$v=4$, $b=6$, $k=24$,唯一可讓Owen之最佳n_{ij}爲整數之ω值爲1/6。當$\omega=1/6$, Owen之$n_{0j}=4$, $n_{ij}=5$,所以$r_0=24$, $r_i=30$, $i=1,\cdots,4$。將v, b, k值代入引理3.1,我們檢視24個ω值,並將其所對應之$r_0^*(\omega)$值表列於後。從下表中我們可看出當$\omega=1/6$, $r_0^*(1/6)=24$,和Owen所求出之值相同。

ω	$r_0^*(\omega)$	ω	$r_0^*(\omega)$	ω	$r_0^*(\omega)$
1/11.5*	+0	1/7.5	18	1/3.5	35
1/11*	+4	1/7*	+20	1/3	36
1/10.5	6	1/6.5*	+24	1/2.5	37
1/10	7	**1/6**	**+24**	1/2	41
1/9.5	10	1/5.5*	+24	1/1.5	42
1/9	12	1/5	28	1/1*	+44
1/8.5	13	1/4.5	30	1/0.5*	+48
1/8	17	1/4	31	∞	+48

"+"表$r_0^*(\omega)=bt+s$之BTBD $(v,b,k;t,s)$存在。

例3.2: 當$v = 9$, $b = 3$, $k = 48$,唯一可讓Owen之最佳n_{ij}為整數之ω值為$1/12$。當$\omega = 1/12$, Owen之$n_{0j} = 3$, $n_{ij} = 5$,所以$r_0 = 9$, $r_i = 15$, $i = 1,\cdots,9$。將v, b, k值代入引理3.1,我們檢視24個ω值,並將其所對應之$r_0^*(\omega)$值表列於後。從下表中我們亦可看出當$\omega = 1/12$, $r_0^*(1/12) = 9$,和Owen所求出之值亦相同。

ω	$r_0^*(\omega)$	ω	$r_0^*(\omega)$	ω	$r_0^*(\omega)$
1/16	0	1/11	11	1/4	27
1/15	3	1/10	13	1/3.7	27
1/14.5	3	1/9	15	1/3	29
1/14	4	1/8	18	1/2	32
1/13	7	1/7	20	1/1	34
1/12.4*	+9	1/6	22	1/0.5	35
1/12	**+9**	1/5	24	1/0.4*	+36
1/11.6*	+9	1/4.3	27	∞	+36

"+"表$r_0^*(\omega) = bt + s$之BTBD $(v, b, k; t, s)$存在。

註:前面二表中有"+"記號之$r_0^*(\omega)$值表示其所對應之BTBD存在。但除了上面所提及之二例外,其餘ω值所對應之Owen之最佳n_{ij}值皆為實數,故上二表中有"*"號之ω所對應之BTBD,其最適性無法由Owen之方法證出,但可藉由引理3.1證出。

4. 設計穩健性

穩健性為探討貝氏設計必須要研究的另一重要性質,由於先前資訊之參數眾多,故Majumdar (1992)只針對其中一個參數a來討論,本文將擴大對兩個先前參數,亦即a和γ_1,來探討貝氏最適設計之穩健性。

在例3.1中,當$\omega = 1/6.5$, $1/6$, $1/5.5$時,$r_0^*(\omega)$值均為24,若我們能證明當$1/6.5 \leq \omega \leq 1/5.5$, $r_0^*(\omega)$均為24,則對所有ω在$1/6.5$和$1/5.5$之間, BTBD (4, 6, 24; 4, 0)均為貝氏最適設計,亦即穩健貝氏最適設計。

定理4.1: 假設$\omega_1 < \omega_2$為二非負實數,則$r_0^*(\omega_1) \leq r_0^*(\omega_2)$。

引理 **4.1:** 假設 $\omega_1 < \omega_2$ 爲二非負實數,則

對所有 $\omega < \omega_1$, $g_0(y,z;\omega_1) \le g_0(y,z+1;\omega_1) \Rightarrow g_0(y,z;\omega) < g_0(y,z+1;\omega)$,

對所有 $\omega > \omega_2$, $g_0(y,z;\omega_1) \ge g_0(y,z+1;\omega_1) \Rightarrow g_0(y,z;\omega) < g_0(y,z+1;\omega)$ 。

由定理 4.1 及引理 4.1 可得,若 $\omega_1 < \omega_2$,且 $r_0^*(\omega_1) = r_0^*(\omega_2) = r_0^*$,則對所有 $\omega \in [\omega_1,\omega_2]$, $r_0^*(\omega) = r_0^*$ 。

令 $r_0^*(\infty) = b(k - y_\infty^*) + z_\infty^*$ 表示當 $\omega \to \infty$ 時之 $r_0^*(\omega)$ 值,定義 ω_e 符合 $g_0(y_\infty^*, z_\infty^*; \omega_e) - g_0(y_\infty^*, z_\infty^* - 1; \omega_e) = 0$ 。則對所有 $\omega \in [\omega_e,\infty)$, $r_0^*(\omega) = r_0^*(\omega_e) = r_0^*(\infty)$,且對所有 $\omega \in [0,\omega_e)$, $r_0^*(\omega) = r_0^*(\infty)$ 。

接下來本文之做法是將 ω 之範圍分成若干區間 $S_i = [\omega_i, \omega_{i+1})$, $i = 1, \cdots, e-1$, $S_0 = [0,\omega_1)$, $S_e = [\omega_e, \infty)$,且 $\forall \omega \in S_i$, $r_0^*(\omega)$ 均爲 i,例如 S_2 表當 $\omega_2 \le \omega < \omega_3$ 時, $r_0 * (\omega)$ 值均爲 2, S_e 表當 $\omega_e \le \omega < \infty$ 時, $r_0^*(\omega)$ 值均爲 e,亦即當 $\omega_e \le \omega < \infty$ 時,貝氏最適設計和沒有使用任何先前資訊之傳統最適設計是一樣的 。

定理 **4.2:** 給定 v, b, k 值,存在區間 $S_0, S_1, \cdots, Se$,以致於 $\bigcup_{i=0,\cdots,e} S_i = [0,\infty)$,若 BTBD($v$, b, k; t, s) 當 $r_0 = bt + s = i$ 存在,則對所有 $\omega \in S_i$,該設計均爲貝氏 A 最適設計和 Γ-minimax 設計 。

故在區間 S_i 之內,若平衡處理集區設計存在,則該設計在區間 S_i 中均爲最適設計,我們稱之爲穩健最適設計 。但對平衡處理集區設計不存在之區間,假設爲 S_u,一般而言,可用下面兩種方法建立"近似"最適設計:

方法一: 用一 r_0 值最接近 u 之平衡處理集區設計代替;

做法: 當 BTBD(v, b, k; t, s), $r_0^*(\omega) = bt + s = u$ 不存在時,令 $\hat{u}$ 表最小之 r_0 值, $\tilde{u}$ 表最大之 r_0 值,以致於 BTBD(v, b, k; t, s),當 $r_0 = bt + s = \tilde{u}$ 和 $\hat{u}$ 均存在,且 $\tilde{u} < u < \hat{u}$ 。選擇最接近 $g_0(y_u^*, z_u^*; w)$ 之 BTBD 。

方法二: 維持 $r_0 = u$,建立一個最「接近」平衡處理集區設計之設計代替 。

評估上述兩種方法所得之替代設計之效率 (efficiency) 定義如下:

$$eff_{1u} = (g_0(y_u^*, z_u^*; \omega)) \div (\text{方法一之 } g_0(y,z;\omega) \text{ 值}),$$

$$eff_{2u} = (g_0(y_u^*, z_u^*; w)) \div (\text{方法二之 } tr(C_d) \text{ 值}) \text{ 。}$$

一般而言,兩種方法所得之效率均相當不錯(可由下面之二例中看出),但除非必要,作者不建議使用方法二,主因是方法二沒有一定之建立規則可依循。

例 **4.1:** 當 $v = 3$, $b = 4$, $k = 5$,用上述兩種方法找出,當平衡處理集區設計不存在之區間 S_u 之替代設計。由於 S_i 之範圍無法確實解出,在本例中,我們將 ω 從 $1/(k-1) = 1/4$ 開始(因根據引理4.1,若 $\omega \le 1/4$,最適之 r_0 值均爲0)以0.05之間距增加,並將第一個使 r_0 增加1之 ω 值記錄如下表。"+"表平衡處理集區設計存在之 r_0 值。令 d_u 表利用方法二所找出最接近平衡處理集區設計之替代設計,所得之結果表列如表1及表2。

例 **4.2:** 當 $v = 3$, $b = 12$, $k = 4$,用上述兩種方法找出,當平衡處理集區設計不存在之區間 S_u 之替代設計。由於 S_i 之範圍無法確實解出,在本例中,我們將 ω 從 $1/(k-1) = 1/3$ 開始以0.005之間距增加,並將第一個使 r_0 增加1之 ω 值記錄如下表3。d_u 之建立如例3.1,故省略。

註:上面二例之表中之 $r_0^*(\omega)$ 行內,所有在前面有+號之 r_0 值代表其所對應之BTBD存在。若根據Owen之方法所求得之最佳 n_{ij} 在上述二例中均爲實數,故這些BTBD之最適性無法由Owen之方法證明,但可經由本文之引理3.1證明。

5. 範例表格

本節中將提供四個表格,表4爲相對於 (v, k), b 較大之例子;表5爲相對於 (v, b), k 較大之例子;表6爲相對於 b, (v, k) 較大之例子;表7爲 v, b, k 均較大之例子。

表格之求得爲給定 v, b, k 值,ω 從 $1/(k-1)$ 開始以0.005之間距增加,並將第一個使 r_0 增加1之 ω 值記錄下來。

由這些表格中可看出,平衡處理集區設計在若干區間內是穩健貝氏 A 最適設計,而在其它區間中雖不是最適設計(很有可能亦是最適設計,只是現存之方法無法證明),但其效率值亦是相當高,所以從實用的觀點來看,我們可將先前資訊 ω 之範圍重新區隔成較 S_i 爲長之區間,以致於使得平衡處理集區設計

在這些新的區間之內，若不是穩健貝氏 A 最適設計，即是效率相當高之穩健設計。

在下列表 4 中我們可將 ω 之區間重新劃分爲五段，亦即：[0, 1.270), [1.270, 1.470), [1.470, 1.790), [1.790, 2.405), 和 [2.405, ∞)。當 $\omega \in [0, 1.270)$ 時，我們可用 BTBD(3,14,5;1,2)；當 $\omega \in [1.270, 1.470)$ 時，我們可用 BTBD(3,14,5;1,5)；當 $\omega \in [1.470, 1.790)$ 時，我們可用 BTBD (3,14,5;1,8)；當 $\omega \in [1.790, 2.405)$ 時，我們可用 BTBD (3,14,5;1,11)；當 $\omega \in [2.405, \infty)$ 時，我們可用 BTBD(3,14,5; 2,0)。我們可看出這些 BTBD 在所對應之新的區間內，若不是爲穩健貝氏 A 最適設計，即是效率相當高之穩健設計。

表1.

$$d_0 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{matrix} \quad d_1 = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{matrix} \quad d_2 = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{matrix} \quad d_3 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{matrix}$$

$$d_4 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{matrix} \quad d_6 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{matrix} \quad d_7 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{matrix}$$

表2.

ω	$r_0^*(\omega)$	r_0, eff_1	r_0, eff_2
0.40	0	5, 0.9288	0, 0.9890
0.45	1	5, 0.9527	1, 0.9966
0.50	2	5, 0.9996	2, 0.9996
0.55	3	5, 0.9750	3, 0.9967
0.60	4	5, 0.9782	4, 0.9963
1.20	+5	5, 1.0000	5, 1.0000
1.40	6	5, 0.9995	6, 0.9963
1.70	7	8, 0.9939	7, 0.9964
2.35	+8	8, 1.0000	8, 1.0000
∞	+8	8, 1.0000	8, 1.0000

表3.

ω	$r_0^*(\omega)$	r_0, eff_1	r_0, eff_2
.535	1	0, 0.999871	1, 0.999627
.545	2	3, 0.999636	2, 0.999632
.555	+3	3, 1.000000	3, 1.000000
.570	4	3, 0.999812	4, 0.999614
.580	5	6, 0.999477	5, 0.999617
.595	+6	6, 1.000000	6, 1.000000
.615	7	6, 0.999822	7, 0.999600
.630	8	9, 0.999373	8, 0.999608
.650	+9	9, 1.000000	9, 1.000000
.675	10	9, 0.999931	10, 0.999589
.700	11	12, 0.999195	11, 0.999592
.735	+12	12, 1.000000	12, 1.000000
6.395	13	12, 0.999998	13, 0.998238
8.935	14	12, 0.998467	14, 0.998278
15.730	+15	15, 1.000000	15, 1.000000
92.985	16	15, 0.998780	16, 0.996779
∞	16		

表4. $v = 3$, $b = 14$, $k = 5$, BTBD之效率

ω	$r_0^*(\omega)$	r_0, eff_1	ω	$r_0^*(\omega)$	r_0, eff_1
.420	0	16, 0.9525	1.135	15	16, 0.9997
.425	1	16, 0.9550	1.175	+16	16, 1.0000
.435	2	16, 0.9595	1.220	17	16, 0.9999
.440	3	16, 0.9615	1.270	18	19, 0.9996
.450	4	16, 0.9653	1.330	+19	19, 1.0000
.460	5	16, 0.9686	1.395	20	19, 0.9999
.465	6	16, 0.9702	1.470	21	22, 0.9996
.480	7	16, 0.9742	1.560	+22	22, 1.0000
.490	8	16, 0.9765	1.665	23	22, 0.9999
.500	9	16, 0.9785	1.790	24	25, 0.9995
.515	10	16, 0.9811	1.950	+25	25, 1.0000
.530	11	16, 0.9831	2.145	26	25, 0.9999
.545	12	16, 0.9847	2.405	27	28, 0.9994
.565	13	16, 0.9863	2.750	+28	28, 1.0000
.585	14	16, 0.9874	∞	+28	28, 1.0000

表5. $v = 4$, $b = 3$, $k = 12$, BTBD之效率

ω	$r_0^*(\omega)$	r_0, eff_1	ω	$r_0^*(\omega)$	r_0, eff_1
0.185	+0	0, 1.0000	0.400	7	12, 0.9557
0.190	1	0, 0.9991	0.440	8	12, 0.9633
0.195	2	0, 0.9981	0.495	9	12, 0.9703
0.210	3	0, 0.9914	0.905	10	12, 0.9928
0.255	4	0, 0.9659	1.130	11	12, 0.9973
0.275	5	0, 0.9519	1.560	+12	12, 1.0000
0.295	6	0, 0.9361	∞	+12	12, 1.0000

表6. $v = 12, b = 5, k = 16$, BTBD 之效率

ω	$r_0^*(\omega)$	r_0, eff_1	ω	$r_0^*(\omega)$	r_0, eff_1
0.225	0	20, 0.8773	0.550	11	20, 0.9598
0.230	1	20, 0.8807	0.605	12	20, 0.9649
0.240	2	20, 0.8868	0.680	13	20, 0.9700
0.250	3	20, 0.8922	0.775	14	20, 0.9746
0.265	4	20, 0.8993	0.905	15	20, 0.9788
0.280	5	20, 0.9054	1.760	16	20, 0.9905
0.325	6	20, 0.9214	2.505	17	20, 0.9939
0.345	7	20, 0.9273	4.440	18	20, 0.9968
0.370	8	20, 0.9336	22.530	19	20, 0.9988
0.395	9	20, 0.9388	∞	19	20, 0.9991
0.425	10	20, 0.9439			

表7. $v = 10, b = 11, k = 12$, BTBD 之效率

ω	$r_0^*(\omega)$	r_0, eff_1	ω	$r_0^*(\omega)$	r_0, eff_1
0.275	0	12, 0.9845	0.515	17	12, 0.9969
0.280	1	12, 0.9862	0.540	18	22, 0.9973
0.285	2	12, 0.9878	0.565	19	22, 0.9984
0.290	3	12, 0.9893	0.590	20	22, 0.9991
0.300	4	12, 0.9918	0.620	21	22, 0.9997
0.305	5	12, 0.9929	0.655	+22	22, 1.0000
0.315	6	12, 0.9947	1.230	23	22, 0.9999
0.320	7	12, 0.9954	1.355	24	22, 0.9996
0.330	8	12, 0.9967	1.515	25	22, 0.9987
0.340	9	12, 0.9976	1.725	26	22, 0.9973
0.350	10	12, 0.9983	2.010	27	22, 0.9954
0.360	11	12, 0.9986	2.420	28	32, 0.9957
0.435	+12	12, 1.0000	3.055	29	32, 0.9973
0.450	13	12, 0.9999	4.175	30	32, 0.9986
0.465	14	12, 0.9996	6.695	31	32, 0.9995
0.480	15	12, 0.9990	17.510	+32	32, 1.0000
0.495	16	12, 0.9982	∞	+32	32, 1.0000

參考文獻

Giovagnoli, A. and I. Verdinelli (1983). Bayes D-optimal and E-optimal block designs. *Biometrika* **70**, 695-706.

Giovagnoli, A. and I. Verdinelli (1985). Optimal block designs under a hierarchical linear model. In Bayesian Statistics 2 (I. M. Bernardo, M. H. DeGroot, D. V. Lindly, and A. F. M. Smith, eds.) 655-662. North-Holland, Amsterdam.

Hedayat, A. S., Jacroux, M., and D. Majumdar (1988). Optimal designs for comparing test treatments with controls. *Statist. Sci.* **3**, 462-491.

Majumdar, D. (1988). Optimal block designs for comparing new treatments with a standard treatment. In Optimal Design and Analysis of Experiments (Y. Dodge, V. V. Fedorov, and H. P. Wynn, eds.) 15-27. North-Holland, Amsterdam.

Majumdar, D. (1992). Optimal designs for comparing test treatments with a control utilizing prior information. *Ann. Statist.* **20**, 216-237.

Owen, R. J. (1970). The optimum design of a two-factor experiment using prior information. *Ann. Math. Statist.* **41**, 1917-1934.

Stufken, J. (1991). Bayes *A*-optimal and efficient block designs for comparing test treatment with a standard treatment. *Comm. Statist. Theory Methods* **20**, 3849-3862.

Ting, C. P. and Y. Y. Yang (1993). Bayes *A*-optimal designs for comparing test treatments with a control when $k > v$. *Technical Report* No. 93-01, Graduate Institute of Statistics, National Chengchi University, Taiwan, R.O.C.

[民國 83 年 5 月 12 日收稿，民國 83 年 12 月 19 日第一次修訂，

[民國 84 年 2 月 21 日第二次修訂]

Bayes A-Optimal Block Designs and Γ-minimax Designs

Chao-Ping Ting and Yu-Yun Yang

Graduate Institute of Statistics
National Chengchi University
Taipei, Taiwan, 11623, R.O.C.

ABSTRACT

The problem of comparing a set of v test treatments simultaneously with a control treatment for arbitrary values of k and v is considered. Following the work of Majumdar (1992), we use exact design theory to derive Bayes A-optimal block designs and optimal Γ-minimax designs for the one-way elimination of heterogeneity model. Tables of robust optimal designs and highly efficient designs with a more general error prior assumption are given.

Key words and phrases: A-optimal designs, Bayes experimental designs, block designs, BTBD, optimal Bayes designs, Γ-minimax designs, robust designs.

AMS 1991 subject classifications: Primary 62K05; secondary 62K10.