中國統計學報
第32卷第2期
八十三年六月
257–279頁

當 $k > v$ 時之最適 A 型集區設計

丁兆平

國立政治大學統計研究所

摘　要

給定 (v,b,k) 之值，且當 $k > v$ 時，許多平衡處理集區設計之最適性已被證實，本文找出較以往更為廣泛之最適 A 型設計之充分條件，除了可以證實某些平衡處理集區設計之最適性（指無法用現有之理論所證實之平衡處理集區設計）之外，並且可以進一步證實某些特殊形式之組可分處理集區設計之 A 型最適性。

關鍵詞：平衡處理集區設計，組可分處理集區設計，正規圖形處理設計。

美國數學會分類索引：主要 62K05; 次要 62K10。

1. 引言

在農業、工業以及生物界之實驗中，往往需同時比較一個對照處理 (control treatment) 與 v 個試驗處理 (test treatment) 之差異。例如在農業上，我們原先採用農藥 D 來防治某類型的病蟲害，若現有 v 種新農藥，且這些新農藥可能對

這種病蟲害的防治很有效果,所以我們要做一實驗來比較這些新農藥與原來使用之農藥D之差異,以決定是否以某種新農藥來取代農藥D。

爲了降低實驗之誤差以及增加其準確性,集區設計(block design)成爲實驗者經常使用的設計方法之一。例如在上述的實驗中,假設我們有b塊農田可供使用,每一塊農田可分爲k區(plot),亦即共有bk個實驗單位(experimental units),爲了減少因爲農田性質的差異而導致實驗的誤差,我們將每一塊農田視爲一個集區,而後將這$v+1$種農藥施用在這b塊農田之內。這樣的設計方法即稱之爲集區設計。

由於人力、物力、時間以及經費等多方面的限制,如何將實驗處理配置集區內,以便能從實驗中獲得最大的資訊,是一個很重要的課題。簡單地說,我們希望能夠找到一個設計方法,利用這個設計方法所設計出來的實驗,能使得對照處理效果τ_0,與試驗處理效果τ_i之間的差異($\tau_0-\tau_i, 1\le i\le v$),得到一個最有效率的估計。此方法即謂之最適集區設計法(optimal block design)。

在對照處理—試驗處理比較之集區設計裡,最適設計的準則,大多訴諸於尋求一個能使得$(\hat{\tau}_0-\hat{\tau}_i,\cdots,\hat{\tau}_0-\hat{\tau}_v)'$之共變異數矩陣(covariance matrix)的某一函數值爲最小之實驗配置。但因定義的函數不同,達到最適設計的實驗配置方式亦有所差別。

本文所採用的最適設計準則是根據Kiefer (1958)所定義的,其中常見於各文獻上的三種最適設計爲:最適A型設計(A-optimal design),最適D型設計(D-optimal design),以及最適E型設計(E-optimal design),其中以最適A型設計最爲研究者所青睞。而後Bechhofer and Tamhane (1981)則考慮在$k\le v$時,同時比較一個對照處理與v個試驗處理的情形下,定義一個平衡處理不完全集區設計(Balanced Treatment Incomplete Block Design,簡稱BTIBD設計)。此設計之C–矩陣爲一完全對稱之矩陣,由於此良好性質,BTIBD設計遂在後續的研究中被廣爲研討。

當$k>v$時,由於C–矩陣本身之複雜性,有關尋找最適設計之文獻並不多見,其中Ting and Notz (1987, 1988)找出最適A型集區設計之充分條件,並證明出某些型式之平衡處理集區設計(Balanced Treatment Block Design,簡稱BTBD,定義見下節)之最適性。Jacroux and Majumdar (1989)則利用不同的方法亦證出BTBD之最適性。但在不同組合之v, b, k值之下,BTIBD或BTBD亦屬有

限，當BTIBD或BTBD不存在時，亦即，上述之論文無法應用時，怎樣的設計方是最適設計呢？由於組可分設計(Group Divisible Design)雖然不似BTIBD或BTBD般的對稱，但從某些方面來看亦具有相當的對稱性，且BTIBD或BTBD亦是組可分設計之特例，故Jacroux (1989)針對這個問題在$k \leq v$之情況下，證明出當某些特殊型式之不完全組可分處理設計(Incomplete Group Divisible Treatment Design，簡稱IGDTD)存在時，該設計爲一最適A型設計。Stufken (1990)就$v = 4, b = 6, k = 3$時，找出具有最小集區數目的IGDTD之生成設計(generator design)。張萃貞(1991)則探討$v = 4, b = 6, k = 3$時，IGDTD之最適A型性。但當$k > v$時，若BTBD不存在時，何種設計會爲最適A型設計呢？是否組可分處理設計(Group Divisible Treatment Design，簡稱GDTD)，亦即IGDTD當$k > v$時之推廣，仍具有最適A型設計之可能呢？到目前爲止，尚未有相關之文獻出現。故本文之研究重點爲探討當$k > v$之情況下，組可分處理設計之最適A型性。

本文之編排如后：第2節介紹集區設計及最適A型設計之定義，以及本文所需之定義與定理。第3節給出本文之主要定理，爲避免證明過長，影響本節之可讀性，部分定理證明和Jacroux (1989)類似的部分已省略，實例以及表列之最適A型設計之參數值則放在第4節中。

2. 導論

本節中我們將介紹集區設計的模型、最適型設計的定義以及與本文相關之定義與定理。從本節開始，k和v之間之關係如下：

$$k > v \geq 3\text{。}$$

2.1 集區設計

假設現有$v+1$個處理，分別標示爲$0, 1, \cdots, v$，其中0代表對照處理，$1, 2, \cdots, v$代表試驗處理。我們將這$v+1$個處理配置到大小爲k的b個集區裡，$v, b, k \geq 2$。令Y_{ijh}表示第i $(0 \leq i \leq v)$個處理配置在第j $(1 \leq j \leq b)$個集區中之第h $(1 \leq h \leq k)$個位置之觀察值。假設模型如下：

$$Y_{ijh} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ijh}\,, \tag{2.1}$$

其中

μ :總體平均數(overall mean),

τ_i :第i個處理之效果(treatment effect), $0 \le i \le v$,

β_j :第j個集區之效果(block effect) , $1 \le j \le b$,

ϵ_{ijh} :具有相同之期望值0及變異數σ^2,且彼此不相關之隨機誤差(random error) 。

本文中我們僅考慮連結設計(connected design) ,亦即在模型(2.1)之下,$\tau_0 - \tau_i, i = 1, \cdots, v$均是可被估計,並且令$\hat{\tau}_0 - \hat{\tau}_i$爲$\tau_0 - \tau_i$之最佳線性不偏估計量(BLUE) 。如前所述,本文的目的在於尋找最適A型集區設計,所以接下來我們將介紹最適A型設計之定義,但在這之前,爲了易於瞭解起見,我們先將一些符號予以定義。

n_{dij} :處理i在集區j中出現之次數, $0 \le i \le v$, $1 \le j \le b$ 。

$\lambda_{dii'} = \sum_{j=1}^{b} n_{dij} n_{dij'}$:處理i與處理i'在設計中共同出現之次數, $0 \le i \ne i' \le v$ 。

$r_{di} = \sum_{j=1}^{b} n_{dij}$:處理i在設計中出現之總次數, $0 \le i \le v$ 。

$D(v,b,k)$:在給定(v,b,k)之值下,符合模型(2.1)之所有可能的集區設計之集合。

$D_e(v,b,k)$:爲$D(v,b,k)$之子集合,且v個試驗處理在集區內出現的次數儘可能相等,換言之, $|n_{dij} - n_{di'j'}| \le 1, 1 \le i, i' \le v, 1 \le j, j' \le b$ 。

$D(r_0; v,b,k)$:爲$D(v,b,k)$之子集合,其中對照處理在設計中出現的次數爲r_0 。

$D_e(r_0; v,b,k)$:爲$D_e(v,b,k)$之子集合,其中對照處理在設計中出現的次數爲r_0 。

2.2 最適A型設計

若設計$d^* \in D(v,b,k)$符合下列之條件,則稱d^*爲在$D(v,b,k)$中之最適A型設計。

$$\sum_{i=1}^{v} \mathrm{Var}_{d^*}(\hat{\tau}_0 - \hat{\tau}_i) = \min_{d \in D(v,b,k)} \sum_{i=1}^{v} \mathrm{Var}_d(\hat{\tau}_0 - \hat{\tau}_i) \text{ 。}$$

觀察上述之模型可得知,如果要找出一個最適 A 型集區設計,首要條件需先求得 $\sum_{i=1}^{v} \mathrm{Var}_d(\hat{\tau}_0 - \hat{\tau}_i)$ 。而

$$\sum_{i=1}^{v} \mathrm{Var}_d(\hat{\tau}_0 - \hat{\tau}_i) = \sigma^2 \mathrm{tr}(C_d^{-1}),$$

此處之 C_d(亦即 C-矩陣)是一個 v 維非負定且非奇異(nonnegative definite and nonsingular)之矩陣,且根據 Bechhofer and Tahmane (1981) 可得 $C_d = (c_{dii'})$,其中

$$c_{dii'} = \begin{cases} r_{di} - (1/k)\sum_{j=1}^{b} n_{dij}^2, & 1 \le i = i' \le v, \\ -(1/k)\sum_{j=1}^{b} n_{dij} n_{di'j}, & 1 \le i \ne i' \le v \text{ 。} \end{cases}$$

由於 $\sum_{i=1}^{v} \mathrm{Var}_d(\hat{\tau}_0 - \hat{\tau}_i)$ 和 $\mathrm{tr}C_d^{-1}$ 只差一個常數,故從本節開始,如果 d^* 符合 $\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} = \min_{d \in D(v,b,k)} \mathrm{tr}C_d^{-1}$,我們稱 d^* 爲最適 A 型設計 。

2.3 定義與預備定理

定義 **2.1**: 設計 $d \in D_e(r_0; v, b, k)$,若滿足下列條件,則稱之爲平衡處理集區設計 。

1. $|n_{d0j} - n_{d0j'}| \le 1,\ 1 \le j, j' \le b$,
2. $\sum_{j=1}^{b} n_{d0j} n_{dij} = \lambda_{d0i} = \lambda_{d0},\ 1 \le i \le v$,
3. $\sum_{j=1}^{b} n_{dij} n_{di'j} = \lambda_{dii'} = \lambda_{d1},\ 1 \le i \ne i' \le v$ 。

註:當 $k \le v$ 時,平衡處理集區設計即爲平衡處理不完全集區設計 。

定義 **2.2**: 設計 $d \in D_e(r_0; v, b, k)$ 且具有參數值 $(m, n, \lambda_{d0}, \lambda_{d1}, \lambda_{d2})$,若 d 之 $v+1$ 個處理可分成 $m+1$ 組, $V_0, V_1, \cdots, V_m$,其大小分別爲 $v_0, v_1, \cdots, v_m$,且滿足下列條件,則稱之爲組可分處理設計 。

1. $V_0 = \{0\}$,
2. $v_1 = v_2 = \cdots = v_m = n$,
3. $\lambda_{d0i} = \lambda_{d0},\ 1 \le i \le v$,
4. 若 $p, q \in V_s,\ 1 \le p \ne q \le v$,則 $\lambda_{dpq} = \lambda_{d1},\ 1 \le s \le m$,

5. 若$p \in V_s, q \in V_t, 1 \le p \ne q \le v$,則$\lambda_{dpq} = \lambda_{d2}$, $1 \le s \ne t \le m$,

6. $|n_{d0j} - n_{d0j'}| \le 1, 1 \le j, j' \le b$ 。

註:1. 當$\lambda_{d1} = \lambda_{d2}$或$m = 1$或$n = 1$時,GDTD即成爲BTBD 。

2. 爲了方便起見,我們將符合本定義之設計標示爲GDTD$(v, b, k; m, n, \lambda_{d0}, \lambda_{d1}, \lambda_{d2})$ 。

定義2.3:設計$d \in D_e(r_0; v, b, k)$,若符合下列條件,則稱之爲正規圖形處理設計(Regular Graph Treatment Design,簡稱RGTD) 。

1. $r_{d1} = \cdots = r_{dv} = (bk - r_0)/v = r$,
2. $\lambda_{d01} = \cdots = \lambda_{d0v} = \lambda_{d0}$,
3. $|n_{d0j} - n_{d0j'}| \le 1, 1 \le j, j' \le b$,
4. $|\lambda_{dii'} - \lambda_{dpq}| \le 1, 1 \le i \ne i', p \ne q \le v$ 。

定理2.1: (Jacroux (1985), Cheng et al. (1978)). 令n爲一大於或等於3之整數,A與B皆爲大於0之常數,且$A^2 \ge B \ge A^2/n$ 。設存在一數列$x_1 \le \cdots \le x_n$,且

1. 若$x_1 \ge 0, \sum_{i=1}^n x_i = A, \sum_{i=1}^n x_i^2 \ge B, x_1 \le C$,且

   (i) $C \le (A - (n/(n-1))^{1/2}P)/n, P = (B - A^2/n)^{1/2}$,

   (ii) $(A - C)^2 \ge B - C^2 \ge (A - C)^2/(n-1)$,

則$\sum_{i=1}^n (1/x_i)$之極小值發生在:

$$x_1 = C, x_2 = \cdots = x_{n-1} = \{(A - C) - ((n-1)/(n-2))^{1/2}P_c\}/(n-1),$$
$$x_n = \{(A - C) + ((n-1)(n-2))^{1/2}P_c\}/(n-1),$$
$$P_c = ((B - C^2) - (A - C)^2/(n-1))^{1/2};$$

2. 若$x_1 \ge 0, \sum_{i=1}^n x_i = A, \sum_{i=1}^n x_i^2 \ge B$,則$\sum_{i=1}^n (1/x_i)$之極小值發生在:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = (A - (n/(n-1))^{1/2}P)/n,$$
$$x_n = (A + (n(n-1))^{1/2}P)/n;$$

3. 若$x_1 \ge 0, x_1 \le C \le A/n, \sum_{i=1}^n x_i \le A$,則$\sum_{i=1}^n (1/x_i)$之極小值發生在:

$$x_1 = C, x_2 = \cdots = x_n = (A - C)/(n-1) \text{ 。}$$

定理2.2:若設計$d \in D_e(r_0; v, b, k)$是一個GDTD$(v, b, k; m, n, \lambda_{d0}, \lambda_{d1}, \lambda_{d2})$,則$d$具有下列性質:

1. C_d的v個特徵值$(\rho_{di}, 1 \le i \le v)$爲

$\rho_{d1} = \lambda_{d0}/k$,

$\rho_{d2} = \cdots = \rho_{d,m(n-1)+1} = (n(m-1)\lambda_{d2} + n\lambda_{d1} + \lambda_{d0})/k$,

$\rho_{d,m(n-1)+2} = \cdots = \rho_{dv} = (v\lambda_{d2} + \lambda_{d0})/k$ 。

2. 假如d之參數爲$\lambda_{d2} = \lambda_{d1} + 1$或$m = v/2, n = 2, \lambda_{d2} = \lambda_{d1} - 1$,若存在任一$d^\# \in$ RGTD,且$d^\# \in D_e(r_0; v, b, k)$,則$\mathrm{tr}C_d^{-1} \le \mathrm{tr}C_{d^\#}^{-1}$ 。

本定理之證明與Jacroux (1989)類似,故省略 。

註:1. 若$\lambda_{d2} > \lambda_{d1}$,則$\rho_{di}$之排序爲

$\rho_{d1} < \rho_{d2} = \cdots = \rho_{d,m(n-1)+1} < \rho_{d,m(n-1)+2} = \cdots = \rho_{dv}$ 。

2. 若$\lambda_{d2} < \lambda_{d1}$,則$\rho_{di}$之排序爲

$\rho_{d1} < \rho_{d,m(n-1)+2} = \cdots = \rho_{dv} < \rho_{d2} = \cdots = \rho_{d,m(n-1)+1}$ 。

3. 主要定理

本節我們將討論當$k > v$時之組可分處理設計之最適A型性 。由於本文是參考Jacroux (1989)的做法,故雖然文中所使用的符號與Jacroux (1989)所代表的不同,但爲方便比較和閱讀,我們仍儘可能延用原符號,唯符號甚多,是以先將其說明列示於后 。

$[\cdot]$ = 最大整數函數,

$a(r_0) = [r_0/b]$,

$r(r_0) = [(bk - r_0)/v]$,

$\bar{r}(r_0) = [(kb - r_0)/bv]$,

$R(r_0) = (r_0 - b\alpha(r_0))(\alpha(r_0) + 1)^2 + (b - r_0 + b\alpha(r_0))\alpha^2(r_0)$,

$\bar{R}(r_0) = (bk - r_0 - bv\bar{r}(r_0))(\bar{r}(r_0) + 1)^2 + (bv - bk + r_0 + bv\bar{r}(r_0))\bar{r}^2(r_0)$,

$A(r_0) = bk - r_0 - \bar{R}(r_0)/k$,

$\bar{A}(r_0) = kA(r_0) + R(r_0) - kr_0$,

$\lambda(r_0) = [\bar{A}(r_0)/(v(v-1))]$,

$B_1(r_0) = (bk - r_0 - vr(r_0))\{r(r_0) + 1 - \frac{1}{k}((r(r_0) + 1 - b\bar{r}(r_0))$

$$\cdot(2\bar{r}(r_0)+1)+b\bar{r}^2(r_0))\}^2+(v-bk+r_0+vr(r_0))$$
$$\cdot\{r(r_0)-\frac{1}{k}((r(r_0)-b\bar{r}(r_0))(2\bar{r}(r_0)+1)+b\bar{r}^2(r_0))\}^2,$$

$$B_2(r_0)=[(\bar{A}(r_0)-v(v-1)\lambda(r_0))(2\lambda(r_0)+1)+v(v-1)\lambda^2(r_0)]/k^2,$$

$$B(r_0)=B_1(r_0)+B_2(r_0),$$

$$\widetilde{B}=B(r_0)+(4\lambda(r_0)+2)/k^2,$$

$$m_1(r_0)=(kr_0-R(r_0))/vk,$$

$$\widetilde{m}_1(r_0)=m_1(r_0)-2/vk,$$

$$\hat{m}_1(r_0)=\min\{m_1(r_0),(A(r_0)-2/k)/v\},$$

$$\begin{cases} m_2(r_0)=(A(r_0)-m_1(r_0)-\sqrt{(v-1)/(v-2)}P(r_0))/(v-1),\\ m_3(r_0)=(A(r_0)-m_1(r_0)+\sqrt{(v-1)(v-2)}P(r_0))/(v-1),\end{cases}$$

其中 $P(r_0)=\{B(r_0)-m_1^2(r_0)-(A(r_0)-m_1(r_0))^2/(v-1)\}^{1/2}$,

$$m_4(r_0)=(A(r_0)-2/k-\hat{m}_1(r_0))/(v-1),$$

$$m_5(r_0)=(A(r_0)-m_1(r_0))/(v-1),$$

$$\begin{cases} m_6(r_0)=(A(r_0)-m_1(r_0)-\sqrt{(v-1)/(v-2)}\bar{P}(r_0))/(v-1),\\ m_7(r_0)=(A(r_0)-m_1(r_0)+\sqrt{(v-1)(v-2)}\bar{P}(r_0))/(v-1),\end{cases}$$

其中 $\bar{P}(r_0)=\{\bar{B}(r_0)-m_1^2(r_0)-(A(r_0)-m_1(r_0))^2/(v-1)\}^{1/2}$,

$$\begin{cases} m_8(r_0)=(A(r_0)-\widetilde{m}_1(r_0)-\sqrt{(v-1)/(v-2)}\,\widetilde{P}(r_0))/(v-1),\\ m_9(r_0)=(A(r_0)-\widetilde{m}_1(r_0)+\sqrt{(v-1)(v-2)}\,\widetilde{P}(r_0))/(v-1),\end{cases}$$

其中 $\widetilde{P}(r_0)=\{\widetilde{B}(r_0)-\widetilde{m}_1^2(r_0)-(A(r_0)-\widetilde{m}_1(r_0))^2/(v-1)\}^{1/2}$,

$$\begin{cases} m_{10}(r_0)=(A(r_0)-\sqrt{v/(v-1)}\hat{P}(r_0))/v,\\ m_{11}(r_0)=(A(r_0)+\sqrt{v/(v-1)}\hat{P}(r_0))/v,\end{cases}$$

其中 $\hat{P}(r_0)=\{B(r_0)-A^2(r_0)/v\}^{1/2}$,

$$H_1(r_0)=\begin{cases}(1/m_1(r_0))+((v-2)/m_2(r_0))+(1/m_3(r_0)), & 若\ m_1(r_0)\le m_2(r_0),\\ ((v-1)/m_{10}(r_0))+(1/m_{11}(r_0)), & 若\ m_1(r_0)>m_2(r_0),\end{cases}$$

$$H_2(r_0)=(1/\hat{m}_1(r_0))+((v-1)/m_4(r_0)),$$

$$H_3(r_0)=(1/m_1(r_0))+((v-1)/m_5(r_0)),$$

$H_4(r_0) = (1/m_1(r_0)) + ((v-2)/m_6(r_0)) + (1/m_7(r_0))$,

$H_5(r_0) = (1/\tilde{m}_1(r_0)) + ((v-2)/m_8(r_0)) + (1/m_9(r_0))$ 。

註：本文之做法雖參考 Jacroux (1989)，但由於若設計 $d \in D_e(v,b,k)$（請參閱 2.1 節），則 $n_{dij} = [(bk - r_0)/vb]$ 或 $[(bk - r_0)/vb] + 1$，而若當 $k \le v$，n_{dij} 則簡化爲 0 或 1（此乃 Jacroux (1989) 所處理之情形），此時所有最適性之證明將簡化許多。由此亦可看出 Jacroux (1989) 之結果無法推廣至 $k > v$ 之情形以及其應用限制。本文所採用之 n_{dij} 表示法爲如前所述之較一般性之表示法，亦即 $n_{dij} = [(bk - r_0)/vb]$ 或 $[(bk - r_0)/vb] + 1$，所以最適性之證明之困難度和複雜性是可想見的，但從此亦可得知本文之證明和結果是可適用於任何之 k 和 v 值。

<u>定理 3.1:</u> 令設計 $d \in D(r_0; v,b,k), 1 \le r_0 \le b(k-1)$ 。則

1. 若 $d \in D_e(r_0; v,b,k)$；則 $\mathrm{tr}C_d = A(r_0)$；
2. 若 $d \notin D_e(r_0; v,b,k)$，則 $\mathrm{tr}C_d \le A(r_0) - 2/k$；
3. 若 $d \in D_e(r_0; v,b,k)$，則 $\sum\sum_{1\le i\ne i'\le v} \lambda_{dii'} \ge A(r_0)$；
4. 若 $d \in D_e(r_0; v,b,k)$，則 $\mathrm{tr}C_d^2 \ge B(r_0)$；
5. $\rho_{d1} \le m_1(r_0) \le A(r_0)/v$，且 $\rho_{d1} \le \mathrm{tr}C_d/v$；
6. 若 $d \in D_e(r_0; v,b,k)$，且 $\sum\sum_{1\le i\ne i'\le v} \lambda_{dii'} \ge \bar{A}(r_0)$，則
   (i) $\mathrm{tr}C_d^2 \ge \tilde{B}(r_0)$, (ii) $\rho_{d1} \le \tilde{m}_1(r_0)$ 。

<u>證明:</u> 由於 2, 3, 5, 6 之證明與 Jacroux (1989) 類似，故省略。現分別證明 1 及 4 。

1. 若 $d \in D_e(r_0; v,b,k)$，則 $n_{dij} = \bar{r}(r_0)$ 或 $\bar{r}(r_0)+1$，所以 $\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{b} n_{dij}^2 = \bar{R}(r_0)$ 。故 $\mathrm{tr}C_d = \sum_{i=1}^{v}(r_{di} - (1/k)\sum_{j=1}^{b} n_{dij}^2) = A(r_0)$，得證。

4. 首先

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}C_d^2 &= \sum_{i=1}^{v}(r_{di} - (1/k)\sum_{j=1}^{b} n_{dij}^2)^2 + \sum_{1\le i\ne i'\le v}\sum \lambda_{dii'}^2/k^2 \\ &= B_{11} + B_{22} \text{ 。}\end{aligned}$$

若 $d \in D_e(r_0; v,b,k)$，則 $n_{dij} = \bar{r}(r_0)$ 或 $\bar{r}(r_0) + 1$，所以 B_{11} 之極小值發生於當 $r_{di} = r(r_0)$ 或 $r(r_0) + 1$，亦即 $B_{11} \ge B_1(r_0)$ 。

因爲$\sum\sum_{1\le i\ne i'\le v}\lambda_{dii'} \ge \bar{A}(r_0)$,所以$B_{22}$之極小值發生於當$\lambda_{dii'} = \lambda(r_0)$或$\lambda(r_0)+1$時,亦即$B_{22} \ge B_2(r_0)$。

綜合上述可得,$\mathrm{tr}C_d^2 \ge B_1(r_0) + B_2(r_0) = B(r_0)$。

註:若$d^* \in D_e(r_0; v, b, k)$爲一BTBD,則$\mathrm{tr}C_{d*}^{-1} = H_3(r_0) = H_1(r_0)$,此處之$H_3(r_0)$即爲Majumdar and Notz (1983)定理2.1中之g函數。當給定r_0值時,$H_3(r_0)$爲$\mathrm{tr}C_d^{-1}(d \in D(v,b,k))$之下限,故在給定$v,b,k$和$r_0$值之情況下,若BTBD存在,則爲$D(r_0; v, b, k)$中之最適$A$型設計。但BTBD和BTIBD設計一樣,只有在某些特定之v,b,k和r_0值之組合下才會存在,然而在其他之參數值之組合下,若BTBD不存在,但在結構上和BTBD類似,且其C-矩陣亦非常"接近"完全對稱之GDTD是否會爲最適A型設計呢?我們發現某些型式之GDTD確實如此,底下我們將利用定理2.1、2.2和定理3.1來證明。

<u>定理3.2:</u>給定一r_0值,若$d^* \in D(r_0; v, b, k)$是一個GDTD$(v, b, k; m = 2, n = v/2, \lambda_{d0}, \lambda_{d1}, \lambda_{d2} = \lambda_{d1} + 1)$,且$m_1(r_0) \le m_2(r_0)$, $\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} \le H_2(r_0)$,則$d^*$是在$D(r_0; v, b, k)$中之最適$A$型設計。

<u>證明:</u>根據定理2.2之1, d^*之特徵值爲$\rho_{d^*1} = m_1(r_0), \rho_{d^*2} = \cdots = \rho_{d^*,v-1} = m_2(r_0), \rho_{d^*v} = m_3(r_0)$,所以$\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} = H_1(r_0)$。對任一設計$d$,我們分兩方面來討論:

1.若$d \in D_e(r_0; v, b, k)$,則根據定理3.1之1, 4, 5,以及定理2.1之1可得: $\mathrm{tr}C_d^{-1} \ge H_1(r_0)$。

2.若$d \in D(r_0; v, b, k)$,但$d \notin D_e(r_0; v, b, k)$,則由定理3.1之2, 5,以及定理2.1之3可得: $\mathrm{tr}C_d^{-1} \ge H_2(r_0)$。

故本定理得證。

<u>例3.1:</u>給定$v = 4, b = 10, k = 9$,當$r_0 = 30$時,$\sum_{i=1}^{v} r_{di} = 60, \bar{r}(r_0) = 1, r(r_0) = 15, \lambda(r_0) = 21$,我們可以排出$m = 2, n = v/2 = 2, \lambda_1 = 21, \lambda_2 = 22, \lambda_0 = 45$的組可分處理設計$d^*$,其關聯矩陣(incidence matrix) N_{d^*}如下:

$$N_{d^*} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} 。$$

經過計算可得 $m_1(30) = 5 < m_2(30) = 14.55556$,且 $\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} = 0.4050738 \le H_2(30) = 0.40611$,所以根據定理3.2上述之GDTD(4,10,9;2,2,45,21,22)是D(30;4,10,9)中之最適 A 型設計。

定理 **3.3:** 給定一 r_0 值,設 $d^* \in D(r_0; v, b, k)$ 是一個GDTD$(v, b, k; m, n, \lambda_{d0}, \lambda_{d1}, \lambda_{d2} = \lambda_{d1} + 1)$,或GDTD$(v, b, k; m = v/2, n = 2, \lambda_{d0}, \lambda_{d1}, \lambda_{d2} = \lambda_{d1} - 1)$。若 $m_1(r_0) \le m_6(r_0)$,且

$$\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} \le \min\{H_2(r_0), H_4(r_0), H_5(r_0)\},$$

則 d^* 是在 $D(r_0; v, b, k)$ 中之最適 A 型設計。

證明:我們將分爲三部分來探討:

1. 設 $d \in D_e(r_0; v, b, k)$,且 $\sum\sum_{1 \le i \ne i' \le v} \lambda_{dii'} = \bar{A}(r_0)$,亦即 $n_{d0j} = \alpha(r_0)$ 或 $\alpha(r_0) + 1$。

(i) 若 d 爲RGTD,根據定理2.2之2得知 $\mathrm{tr}C_d^{-1} \ge \mathrm{tr}C_{d^*}^{-1}$。

(ii) 若 d 不爲RGTD,則 $|\lambda_{dii'} - \lambda_{dpq}| > 1$,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}C_d^2 &= \sum_{i=1}^{v}(r_{di} - (1/k)\sum_{j=1}^{b} n_{dij}^2) + (1/k^2)\sum\sum_{1 \le i \ne i' \le v} \lambda_{dii'}^2 \\ &\ge B(r_0) + \min\{4/k^2, 2((k - 2\bar{r}(r_0) - 1)/k)^2\}, \end{aligned}$$

且由定理3.1之1, 5得知,以及定理2.1之1可得:

$$\mathrm{tr}C_d^{-1} \ge H_4(r_0) 。$$

2. 設 $d \in D_e(r_0; v, b, k)$,且 $\sum\sum_{1 \le i \ne i' \le v} \lambda_{dii'} > \bar{A}(r_0)$,亦即 n_{d0j} 不全等於 $\alpha(r_0)$ 或 $\alpha(r_0) + 1$。

(i)若$\lambda(r_0) = 0$,則根據Jacroux (1985)可得$\widetilde{m}_1(r_0) < m_1(r_0) \le m_6(r_0) \le m_8(r_0)$,且由定理2.1之1可得:

$$\mathrm{tr}C_d^{-1} \ge H_5(r_0) \text{ 。}$$

(ii)若$\lambda(r_0) > 0$,則根據定理3.1之1, 5, 6,以及定理2.1之1可得:

$$\mathrm{tr}C_d^{-1} \ge H_4(r_0), \quad \text{且} \quad H_5(r_0) \ge H_4(r_0) \text{ 。}$$

(故當$\lambda(r_0) > 0$時,$H_5(r_0)$不需考慮。)

3.設$d \in D(r_0; v, b, k)$,但$d \notin D_e(r_0; v, b, k)$,則可比照定理3.2之證明2。

綜合1, 2, 3之結果可得:若d^*如定理所述,且$\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} \le \min\{H_2(r_0), H_4(r_0), H_5(r_0)\}$,則$d^*$為$D(r_0; v, b, k)$中之最適$A$型設計。

<u>例**3.2:**</u>給定$v = 6, b = 15, k = 15$,當$r_0 = 63$時,$\sum_{i=1}^{v} r_{di} = 162, \bar{r}(r_0) = 1, r(r_0) = 27, \lambda(r_0) = 48$,我們可以排出$m = v/2 = 3, n = 2, \lambda_1 = 49, \lambda_2 = 48, \lambda_0 = 113$的組可分處理設計$d^*$,其係數矩陣$N_{d^*}$如下:

$$N_{d^*} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ 。}$$

經過計算可得$m_1(63) = 7.533333 < m_6(63) = 26.769117$、$H_2(63) = 0.31940$, $H_4(63) = 0.3192198$(因為$\lambda(63) > 0$,所以不需計算$H_5(63)$),且$\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} = 0.319219 \le \min\{H_2(63), H_4(63)\}$,所以根據定理3.3,此一GDTD(6, 15, 15; 3, 2, 113, 49, 48)是D(63;6,15,15)中之最適A型設計。

應用定理3.2及3.3,我們建議如下一個尋找最適A型設計之方法:

步驟**1.**給定(v, b, k)之值,找出一個"最適"之r_0值、亦即r_0^*,使得

$$H_1(r_0^*) = \min_{1 \le r_0 \le bk-v} H_1(r_0) \text{ 。}$$

步驟2. 根據此r_0^*值,找出一個設計d^*是$D(r_0^*; v, b, k)$中之最適A型設計。

找出d^*之後,接下來我們將找出使得d^*爲$D(v, b, k)$中之最適A型設計之充分條件。

定理3.4: 設r_0^*及d^*分別爲上述步驟1及2之結果。

1. 令$\bar{r}_0$爲最小之r_0值,$\hat{r}_0$爲最大之r_0值,以至於$H_3(r_0) < \mathrm{tr}C_{d^*}^{-1}$,若設計$d^*$符合

$$\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} < \min_{\bar{r}_0 \leq r_0 \neq r_0^* \leq \hat{r}_0} \{H_1(r_0), H_2(r_0)\},$$

則d^*是在$D(v, b, k)$中之最適A型設計。

2. 若$\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} < H_3(r_0), 1 \leq r_0 \neq r_0^* \leq bk - v$,則$d^*$是在$D(v, b, k)$中之最適$A$型設計。

本定理之證明與Jacroux (1989)中之定理1類似,故省略。

綜合定理3.2、3.3、3.4以及定理3.1後之註解,我們可得下列兩個系理。

系理3.1: 給定(v, b, k)之值,設r_0^*及d^*分別爲步驟1及2之結果,且$d^* \in D_e(r_0^*; v, b, k)$爲服從定理3.2(或定理3.3)之參數條件之GDTD。若d^*能同時滿足定理3.4之條件,則d^*是$D(v, b, k)$中之最適A型設計。

系理3.2: 給定(v, b, k)之值,設r_0^*及d^*分別爲步驟1及2之結果,且$d^* \in D_e(r_0^*; v, b, k)$爲BTBD。若$d^*$亦能滿足定理3.4之條件,則$d^*$是$D(v, b, k)$中之最適$A$型設計。

4. 實例

本節係利用第3節之定理,僅就$v = 4, 6, 8, 9$時找出最適A型設計。

(I) 參數爲$m = 2, n = v/2, \lambda_2 = \lambda_1 + 1$之最適$A$型組可分處理設計。

例4.1: 給定$v = 4, b = 16, k = 15$,依步驟1可得$r_0^* = 80$。故$\bar{r}(80) = 2, r(80) = 40, \lambda(80) = 98$,所以我們可排出$m = 2, n = 2, \lambda_1 = 98, \lambda_2 = 99, \lambda_0 = 200$的組可分處理設計$d^*$:

$$N_{d^*} = \begin{pmatrix} 5&5&5&5&5&5&5&5&5&5&5&5&5&5&5&5 \\ 3&3&3&3&3&3&3&3&2&2&2&2&2&2&2&2 \\ 3&3&2&2&2&2&2&2&3&3&3&3&3&3&2&2 \\ 2&2&3&3&3&2&2&2&3&3&3&2&2&2&3&3 \\ 2&2&2&2&2&3&3&3&2&2&2&3&3&3&3&3 \end{pmatrix},$$

其中$m_1(80) = 13.33333 < m_2(80) = 39.6$, $\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} = H_1(80) = 0.1506728 \le H_2(80) = 0.16076$。所以根據定理3.2, d^*是$D(80;4,16,15)$中之最適A型設計，且對於所有之$r_0(1 \le r_0 \ne 80 \le 236)$值，$H_3(r_0) > \mathrm{tr}C_{d^*}^{-1}$,而根據系理3.1,得$d^*$是$D(4,16,15)$中之最適$A$型設計。

例**4.2:**給定$v = 6, b = 12, k = 12$,依步驟1可得$r_0^* = 42$。故$\bar{r}(42) = 1, r(42) = 17, \lambda(42) = 23$,所以我們可排出$m = 2, n = 3, \lambda_1 = 23, \lambda_2 = 24, \lambda_0 = 59$的組可分處理設計$d^*$：

$$N_{d^*} = \begin{pmatrix} 4&4&4&4&4&4&3&3&3&3&3&3 \\ 2&2&1&1&1&1&2&2&2&1&1&1 \\ 1&1&2&2&1&1&2&1&1&2&2&1 \\ 1&1&1&1&2&2&1&2&1&2&1&2 \\ 2&2&1&1&1&1&1&1&1&2&2&2 \\ 1&1&2&2&1&1&1&2&2&1&1&2 \\ 1&1&1&1&2&2&2&1&2&1&2&1 \end{pmatrix},$$

其中$m_1(42) = 4.91667 < m_2(42) = 16.66667$, $\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} = H_1(42) = 0.5025301 < H_2(42) = 0.50309$。所以根據定理3.2, d^*是$D(42;6,12,12)$中之最適A型設計，且對於所有之$r_0(1 \le r_0 \ne 42 \le 138)$值，使得$H_3(r_0) < \mathrm{tr}C_{d^*}^{-1}$只有一點，亦即$\bar{r}_0 = \hat{r} = 41, H_1(41) = 0.50260, H_2(41) = 0.50309$.我們可看出$\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} < \min\{H_1(41), H_2(41)\}$,而根據系理3.1,得$d^*$是$D(6,12,12)$中之最適$A$型設計。

(II) 參數爲$m = v/2, n = 2, \lambda_1 = \lambda_2 + 1$之最適$A$型組可分處理設計。

例**4.3:**給定$v = 4, b = 14, k = 10$,依步驟1可得$r_0^* = 44$。故$\bar{r}(44) = 1, r(44) = 24, \lambda(44) = 40$,所以我們可排出$m = 2, n = 2, \lambda_1 = 41, \lambda_2 = 40, \lambda_0 = 75$的組可

分處理設計 d^*：

$$N_{d^*} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

其中 $m_1(44) = 7.5 < m_6(44) = 23.52792408$, $\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} = 0.26027471, H_2(44) = 0.26063, H_4(44) = 0.26028$（由於 $\lambda(44) > 0$，所以不需計算 $H_5(44)$）。因爲 $\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} \leq \min\{H_2(44), H_4(44)\}$,所以根據定理3.3, d^* 是 $D(44;4,14,10)$ 中之最適 A 型設計。而在所有之 $r_0(1 \leq r_0 \neq 44 \leq 136)$ 值中,使得 $H_3(r_0) < \mathrm{tr}C_{d^*}^{-1}$ 只有一點,亦即 $\bar{r}_0 = \hat{r}_0 = 43, H_1(43) = 0.26027464, H_2(43) = 0.26060$,我們可看出 $\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} < \min\{H_1(43), H_2(43)\}$,而根據系理3.1,得 d^* 是 $D(4,14,10)$ 中之最適 A 型設計。

(III) 參數爲 $\lambda_2 = \lambda_1 + 1$ 之最適 A 型組可分處理設計。

<u>例 4.4:</u>給定 $v = 9, b = 12, k = 29$，依步驟1可得 $r_0^* = 57$,故 $\bar{r}(57) = 1, r(57) = 19, \lambda(57) = 29$,所以我們可排出 $m = 3, n = 3, \lambda_1 = 29, \lambda_2 = 30, \lambda_0 = 90$ 的組可分處理設計 d^*：

$$N_{d^*} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} = 0.6359944, H_2(57) = 0.636285936, H_4(57) = 0.63599661$（由於

$\lambda(57) > 0$,所以不需計算 $H_5(57)$) 。因爲 $\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} \leq \min\{H_2(57), H_4(57)\}$,所以根據定理3.3, d^* 是 $D(57;9,12,29)$ 中之最適 A 型設計,且對於所有之 $r_0(1 \leq r_0 \neq 57 \leq 339)$ 值, $H_3(r_0) > \mathrm{tr}C_{d^*}^{-1}$,而根據系理3.1,得 d^* 是 $D(9,12,29)$ 中之最適 A 型設計 。

(IV) 最適 A 型之 BTBD 。

<u>例 **4.5:**</u>給定 $v = 5, b = 12, k = 14$,依步驟1可得 $r_0^* = 48$,故 $\bar{r}(48) = 2, r(48) = 24, \lambda(48) = 47$,所以我們可排出 $\lambda_1 = \lambda_2 = 48, \lambda_0 = 96$ 的平衡處理集區設計 d^* :

$$N_{d^*} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} = 0.312499999 = H_1(48) = H_3(48)$ 。經過一些計算我們發現使得 $H_3(r_0) < \mathrm{tr}C_{d^*}^{-1}$ 之 r_0 值只有一點,亦即 $r_0 = 49$ (從這裡亦可看出此 BTBD 之 A 最適之性質無法由現存之理論證明),但 $H_1(49) = 0.31253534, H_2(49) = 0.312750948$,且 $\mathrm{tr}C_{d^*}^{-1} < \min\{H_1(49), H_2(49)\}$,而根據系理3.2 ,得 d^* 是 $D(5,12,14)$ 中之最適 A 型設計 。

由於不同組合之 (v,b,k) 值,最適 A 型組可分處理設計之實例很多,無法一一列舉,僅將一些符合第3節定理之實例之參數值以表格的方式表示,對實例有興趣的讀者可參閱李珍慧(1992) 。

表1. 參數爲 $m = 2, n = v/2, \lambda_2 = \lambda_1 + 1, v = 4, 6, 8$ 之最適 A 型組可分處理設計。

(i) $v = 4$

b	k	r_0	r_{di}	λ_{d0}	λ_{d1}	λ_{d2}
4	9	12	6	18	8	9
4	15	20	10	50	24	25
10	9	30	15	45	21	22
10	15	50	25	125	61	62
16	15	80	40	200	98	99
20	8	56	26	72	32	33
24	20	164	79	539	258	259

(ii) $v = 6$

b	k	r_0	r_{di}	λ_{d0}	λ_{d1}	λ_{d2}
9	11	27	12	36	15	16
9	14	36	15	60	24	25
9	20	54	21	126	48	49
12	12	42	17	59	23	24
15	13	57	23	87	34	35
16	22	100	42	262	109	110
18	21	108	45	270	111	112
19	12	66	27	93	37	38
21	19	117	47	261	104	105

(iii) $v = 8$

b	k	r_0	r_{di}	λ_{d0}	λ_{d1}	λ_{d2}
12	16	48	18	72	26	27
12	27	84	30	210	74	75
16	19	80	28	140	48	49

表2. 參數爲 $m = v/2, n = 2, \lambda_1 = \lambda_2 + 1, v = 4, 6, 8$

之最適 A 型組可分處理設計。

(i) $v = 4$

b	k	r_0	r_{di}	λ_{d0}	λ_{d1}	λ_{d2}
2	9	6	3	9	5	3
2	15	10	5	25	13	12
8	9	24	12	36	18	17
8	15	40	20	100	50	49
10	8	28	13	36	17	16
10	14	48	23	110	53	52
10	20	68	33	224	109	108
14	9	42	21	63	31	30
14	10	44	24	75	41	40
14	14	68	32	155	73	72
14	15	70	35	175	87	86
14	16	72	38	195	103	102
14	20	96	46	315	151	150
18	14	88	41	200	93	92
18	16	92	49	250	133	132
18	20	124	59	406	193	192
20	15	100	50	250	124	123
22	20	152	72	497	235	234

(ii) $v = 6$

b	k	r_0	r_{di}	λ_{d0}	λ_{d1}	λ_{d2}
3	11	9	4	12	6	5
3	14	12	5	20	9	8
3	20	18	7	42	17	16
3	22	18	8	48	22	21
3	23	21	8	56	22	21
5	12	18	7	25	10	9
6	13	24	9	36	14	13
6	21	36	15	90	38	37
9	19	51	20	113	45	44
15	15	63	27	113	49	48
16	21	96	40	240	100	99
17	12	60	24	84	34	33
18	11	54	24	72	32	31
18	14	72	30	120	50	49
18	20	108	42	252	98	97
21	13	81	32	123	48	47
21	15	87	38	157	69	68

(iii) $v = 8$

b	k	r_0	r_{di}	λ_{d0}	λ_{d1}	λ_{d2}
4	14	16	5	20	7	6
4	19	20	7	35	13	12
4	24	24	9	54	21	20
20	9	44	17	37	15	14

表3. 參數爲 $\lambda_2 = \lambda_1 + 1, v = 6, 9$

之最適 A 型組可分處理設計。

(i) $v = 6, m = 2, n = 3$

b	k	r_0	r_{di}	λ_{d0}	λ_{d1}	λ_{d2}
4	13	16	6	24	8	9
4	21	24	10	60	24	25
12	11	36	16	48	20	21
12	14	48	20	80	32	33
12	20	72	28	168	64	65
18	23	120	49	326	132	133
19	22	118	50	310	130	131

(ii) $v = 9, m = 3, n = 3$

b	k	r_0	r_{di}	λ_{d0}	λ_{d1}	λ_{d2}
9	16	36	12	48	15	16
9	20	45	15	75	24	25
9	28	63	21	147	48	49
12	19	57	19	90	29	30
12	29	87	29	210	69	70
21	15	81	26	100	31	32
21	16	84	28	112	36	37
21	20	105	35	175	57	58
21	28	147	49	343	113	114
21	27	144	47	322	104	105

參考文獻

Bechhofer, R. E. and Tamhane, A. C. (1981). Incomplete block designs for comparing treatments with a control: general theory. *Technometrics* **23**, 45-47.

Cheng, C. S. (1978). Optimality of certain asymmetrical experimental designs. *Ann. Statist.* **6**, 1239-1261.

Jacroux, M. (1985). Some sufficient condition for the type I optimality of block designs. *J. Statist. Plann. Infer.* **11**, 385-398.

Jacroux, M. and Majumdar, D. (1989). Optimal block designs for comparing test treatments with a control when $k > v$. *J. Statist. Plann. Infer.* **23**, 381-396.

Jacroux, M. (1989). The A-optimality of block designs for comparing test treatments with a control. *J. Amer. Statist. Assoc.* **84**, 310-317.

Kiefer, J. (1958). On the nonrandomized optimality and randomized nonoptimality of symmetrical designs. *Ann. Math. Statist.* **29**, 675-699.

Majumdar, D. and Notz, W. (1983). Optimal incomplete block designs for comparing treatments with a control. *Ann. Statist.* **11**, 258-266.

Stufken, J. (1990). On group divisible treatment designs for comparing test treatments with a standard treatment in blocks of size 3. *1990 International Statistical Symposium.* Taipei, R.O.C.

Ting, C. P. and Notz, W. (1987). Optimal block designs for treatment-control comparisons, Technical Report No. **374**, The Ohio State University.

Ting, C. P. and Notz, W. (1988). A-Optimal complete block designs for treatment-control comparisons. Optimal Design and Analysis of Experiments (Dodge, Y., Fedorov, V. V. and Wynn, H. P., eds), 29-37. North-Holland, Amsterdam.

李珍慧(1992). 組可分處理集區設計當$k > v$時之最適A型設計的研討。政治大學統計研究所碩士論文。

張萃貞(1991). 對照處理與4或6個試驗處理比較之最佳組可分集區設計之研究。政治大學統計研究所碩士論文。

[民國82年6月10日收稿,民國83年1月7日修訂,民國83年3月17日再修訂]

A-Optimal Block Designs for Comparing Test Treatments with a Control when $k > v$

Chao-Ping Ting

Graduate Institute of Statistics
National Chengchi University
Taipei, Taiwan, 11623, R.O.C.

ABSTRACT

Given values of (v, b, k), and $k > v$, the A-optimality of some specific balanced treatment incomplete block designs (BTBD) have been studied by many authors. In this paper we develop some more generalized sufficient conditions for A-optimality. These results can be used to establish the A-optimality of BTBD's whose optimality cannot be proved using existing methods, and can be used to prove the A-optimality of certain types of group-divisible treatment designs.

Key words and phrases: Balanced treatment block design, group-divisible treatment design, regular graph treatment design.

AMS 1991 subject classifications: Primary 62K05; secondary 62K10.