

S 經濟管制圖的推導與應用¹

楊素芬 謝美秀

國立政治大學統計研究所

摘 要

本研究所推導出的一般化製程模式，考慮多重非隨機因素的影響，比單一非隨機因素模式及多重非隨機因素但限制其發生個數的模式更符合實際，更有彈性。另外，模式中移轉成本的考慮使得成本模式更加完備及合理。文中並以數值例子說明 S 經濟管制圖建立的過程及其在製程上的應用。在實務上，若業者希望以最小品質成本維持製程之穩定，則可依本文之方法建立 S 經濟管制圖。

關鍵詞：管制圖，非隨機因素，更新過程，馬可夫鏈。

美國數學會分類索引：主要60J20；次要65D15。

¹本研究由行政院國家科學委員會贊助，計畫編號NSC 82-0208-M004-003。

1. 前言

Shewhart (1924) 在 70 年前發明品質管制圖後, 至今仍廣為工業界所沿用。唯近年來, 最佳經濟設計管制圖已經被考慮用來維持製程之穩定(見 Chung and Chen (1992))。管制圖之經濟設計首由 Duncan (1956) 提出, 他推薦用經濟設計的觀念獲得使品質成本最小化的 \bar{X} 管制圖最佳設計參數值。這些設計參數包括抽樣期間 (Sampling Interval), 樣本大小 (Sample Size) 及管制圖寬度 (The Width of Control Chart)。在這之後, 無數 Shewhart 型管制圖的各種模式已經被提出, 包括同時使用 \bar{X} 和 R 圖。根據 Duncan (1974) 的觀點, 變數管制圖 (Variable Charts) 中, \bar{X} 圖被用以管制製程平均數 (Process Mean), R 圖則被用來管制製程變異 (Process Variability), 而同時使用 \bar{X} 和 R 圖則可合理的管制整個製程。但是同時使用 \bar{X} 和 R 圖仍有缺點, 即當樣本大小稍大時 (Moderately Large), 全距統計量立刻失去其有效性 (Efficiency) (見 Duncan (1974) 及 Besterfield (1979))。是以 Alt (1981) 建議同時使用 \bar{X} 及 S^2 圖以管制製程。Rahim 等人 (1988) 則根據經濟的考量討論同時使用 \bar{X} 及 S^2 圖。Collani and Sheil (1989) 認為當製程受非隨機因素 (Assignable Cause) 影響時, 有可能使製程變異數會增大而製程平均值不變, 於是提出以可達到單位產品利潤最大的 S 經濟管制圖來追蹤製程是否穩定。唯他們假設製程只可能受到一個非隨機因素影響, 在實務上, 製程可能受二個或以上非隨機因素干擾 (見 Montgomery (1980)), 是以本研究將考慮多個非隨機因素之情形。但當發生於製程上之非隨機因素為多個時, 製程模式 (Process Model) 變得複雜且目標函數之計算困難。目前此方面之有關研究有 Duncan (1971), Tagaras and Lee (1988), Chung (1991) 及 Yang (1993)。然而, 我們發現將多重非隨機因素製程表示為更新過程 (Renewal Processes), 且其中每個更新循環 (Renewal Cycles) 表示為馬可夫過程 (Markov Process), 再以 S 管制圖追蹤的製程平均循環時間 (The Expected Cycle Time, 簡稱 ET) 及平均循環成本 (The Expected Cycle Cost, 簡稱 EC), 可容易的應用馬可夫鏈 (Markov Chain) 方法推導出。最後, 利用更新報酬過程 (Renewal Reward Processes) 性質, 即可推導出目標函數 (成本模式), 即單位時間的平均近似成本 (The Asymptotic Expected Cost Per Unit Time, 簡稱 EA_{∞})。由於目標函數是 S 管制圖設計參數之函數, 因此藉著最小化目標函數, 管制圖之最適設計參

數值(n^* , h^* , k^*)可被決定。另外,我們將舉例說明製程中只存在2個非隨機因素之應用過程並進行資料分析。在資料分析中,我們對成本模式所包括的製程與成本參數值,給予27組特定組合,以決定各參數組合下S經濟管制圖的最適設計參數值(n^* , h^* , k^*)和最低成本值(即 EA_∞)。然後,我們擇取27組中的一組特定參數組合,及其所對應的最適設計參數值,來說明S經濟管制圖之建立及應用。

2. 數學符號的說明與意義

茲將本文所使用的數學符號說明如下:

符號	意義
n	抽樣樣本大小。
h	抽樣時間間隔。
k	管制界限寬度。
α	製程在穩定下發生錯誤警訊的機率。
β_s	製程在失控下無發生正確警訊的機率, $s = 1, \dots, m$ 。
$r_{ss'}$	製程由狀態 s 轉換至狀態 s' 的瞬間移轉速率, $s, s' = 1, \dots, m$ 。
$q_{ss'}$	母矩陣 Q 中所含的元素, $s, s' = 1, \dots, m$ 。
$P'_{ij}(h)$	製程開始在狀態 i 而 h 時間後停留在狀態 j 的移轉機率, $i, j = 1, \dots, m$ 。
$P'(h)$	為 $m \times m$ 之矩陣, $P'(h) = \ P'_{ij}(h)\ _{i,j=1}^m$ 。
$P_{\tau\tau'}(h)$	以S管制圖追蹤製程後,製程開始在狀態 τ 而 h 時間後停留在狀態 τ' 的移轉機率, $\tau, \tau' = 1, \dots, b$ 。
$P(h)$	為 $b \times b$ 之矩陣, $P(h) = \ P_{\tau\tau'}(h)\ _{\tau,\tau'=1}^b$ 。
$P_{11}(h)$	為矩陣 $P(h)$ 之 $m \times m$ 的子矩陣,其元素表已知製程為某一暫態經 h 時間後移轉至任一暫態的移轉機率。
$P_{12}(h)$	為矩陣 $P(h)$ 之 $m \times m$ 的子矩陣,其元素表已知製程為某一暫態經 h 時間後移轉至任一吸態的移轉機率。

T_l	製程由暫態 l 開始至到達任一吸態的時間,其期望值為 ET_l , $l = 1, \dots, m$ 。
M	為 $m \times 1$ 之矩陣,其元素為 $ET_l, l = 1, \dots, m$ 。
$T_{s\tau\tau}$	製程停留在狀態 τ 時搜尋和修正非隨機因素的時間,其期望值為 $ET_{s\tau\tau}, \tau = m + 1, \dots, b$ 。
$M_{s\tau}$	為 $m \times 1$ 之矩陣,其元素為 $ET_{s\tau\tau}, \tau = m + 1, \dots, b$ 。
$T_{s\tau}$	製程停留在狀態 τ 時搜尋非隨機因素的時間,其期望值為 $ET_{s\tau}, \tau = m + 1, \dots, b$ 。
M_s	為 $m \times 1$ 之矩陣,其元素為 $ET_{s\tau}, \tau = m + 1, \dots, b$ 。
N	每個循環內之抽樣及檢定次數,其期望值為 EN 。
a_0	每抽取一個樣本之固定成本。
a_1	每抽取一個樣本之變動成本。
$\gamma_{ij}(h)$	製程已知由狀態 i 開始,經過 h 時間後,停留在狀態 j 的平均累積成本, $i, j = 1, \dots, m$ 。
Γ	為 $m \times m$ 之矩陣, $\Gamma = \ \gamma_{ij}(h)\ _{i,j=1}^m$ 。
$\gamma_{1ij}(h)$	製程由狀態 i 開始,經過 h 時間後停留在狀態 j ,中間停留各種可能狀態所對應的平均累積品質成本和, $i, j = 1, \dots, m$ 。
$\gamma_{2ij}(h)$	製程由狀態 i 開始,經過 h 時間後停留在狀態 j ,中間停留各種可能狀態所對應的平均累積移轉成本和, $i, j = 1, \dots, m$ 。
d_{ij}	製程由狀態 i 移轉至狀態 j 的移轉成本, $i, j = 1, \dots, m$ 。
\hat{c}_l	製程停留在狀態 l 時的單位時間平均成本, $l = 1, \dots, m$ 。
$C_{s\tau\tau'}$	製程在吸態 τ' 的搜尋及修正成本,其期望值為 $EC_{s\tau\tau'}, \tau' = m + 1, \dots, b$ 。
CS	為 $m \times m$ 之矩陣,其第 j 行之每一元素均為 $EC_{s\tau\tau'}, \tau' = m + j, j = 1, \dots, m$ 。
$C_{\tau\tau'}(h)$	以 S 管制圖追蹤製程後,已知製程開始在狀態 τ ,經過 h 時間後,停留在狀態 τ' 的平均累積成本, $\tau, \tau' = 1, \dots, b$ 。
C	為 $b \times b$ 之矩陣, $C = \ C_{\tau\tau'}(h)\ _{\tau,\tau'=1}^b$ 。

ε_l	製程由暫態 l 開始至到達任一吸態而未含平均抽樣及檢定成本的累積成本, 其期望值為 $E\varepsilon_l, l = 1, \dots, m$ 。
U	為 $m \times 1$ 之矩陣, 其元素為 $E\varepsilon_l, l = 1, \dots, m$ 。
δ_j	當製程受到第 j 種非隨機因素影響時, 製程標準差增加之倍數, $j = 1, 2$ 。
EC	平均循環成本。
ET	平均循環時間。
EA_∞	單位時間平均近似成本。

3. 多重非隨機因素製程模式之建立

本節將以馬可夫鏈方法, 建立允許多個非隨機因素同時發生在製程中之製程模式。為使模式在使用上更合理更有彈性且易於推導, 吾人有如下的假設:

- (1) 有興趣的品質特性為一個可測量的製程隨機變數, 且呈常態分佈 (Normal Distribution)。
- (2) 在製程處於穩定狀態, 即製程不受任何非隨機因素影響時, 其品質特性 X 之期望值為 μ_0 , 變異數為 σ_0^2 , μ_0 及 σ_0^2 均為已知常數; 即 $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ 。
- (3) 系統中存在 d 個非隨機因素, 以集合 W 表示之, $W = \{1, 2, \dots, d\}$ 。這些非隨機因素的發生只會影響製程變異, 使製程變異數增大, 而不影響製程平均數。
- (4) 製程上可能發生的非隨機因素所形成之集合令為 s , 則 s 為 W 之一子集合。於是製程所處的狀態可以 W 之任一子集合表示。 W 之子集合共有 2^d 個, 是以製程所處的可能狀態也有 $2^d (= m)$ 種。
- (5) 一旦任何非隨機因素發生在製程中, 非經人為修正, 不會自動消除。當線上品管人員搜尋非隨機因素時, 製程仍然繼續運作, 修正時則停止運作; 即假設製程是連續的 (A Continuous Process)。
- (6) 製程開始時處穩定狀態, 直到管制圖顯示警訊後品管人員搜尋警訊發生原因, 繼而消除原因使製程回復穩定的過程, 稱為一個循環 (Cycle)。於是整個製程可表示為一連串相互獨立的循環; 亦即為一更新過程。而每個循環內

所發生的累積品質成本稱為循環成本,循環成本間為相互獨立及相同之分配 (Independent and Identically Distributed),故整個製程成本被表示為更新報酬過程(參閱 Ross (1989))。

(7) 在更新循環 (Renewal Cycles) 內非隨機因素間發生的時間服從指數分配 (Exponential Distribution) 且相互獨立,即製程在移轉到其他狀態前,停留在狀態 j 的時間 T_j 為一指數分配,其速率為 λ_j ,即 $T_j \sim \exp(\lambda_j)$,其中 $j = 1, 2, \dots, m (= 2^d)$ 。而每個 j 值對應一個 W 的子集合 s 。

(8) 假設抽樣及檢定的時間均很短,故予忽略。

(9) 定義搜尋與修理非隨機因素的時間為隨機變數 T_{sr} ,其期望值為 ET_{sr} ;搜尋與修理非隨機因素的成本為隨機變數 C_{sr} ,其期望值為 EC_{sr} 。

(10) 在成本函數中考慮移轉成本 (Transition Cost) 使成本函數更加完善。移轉成本為非隨機因素發生的剎那所導致的直接成本。如充填瓶裝飲料的機器發生失控,當時會碰撞若干瓶子,這些瓶子可能因此破損或導致飲料流失在瓶外等。而這些損耗即是移轉成本。

(11) 由於非隨機因素的發生只會使製程變異數增大且假設樣本大小大於 10,故吾人選擇 S 管制圖來追蹤製程且不考慮管制下限。 S 管制圖之結構包括中心線 (Central Limit, 簡稱 CL) 和管制上限 (Upper Central Limit, 簡稱 UCL),其中 $CL = c_4\sigma_0$, $UCL = k\sigma_0$ (見 Collani and Sheil (1989))。

根據上述假設,我們可知製程在以 S 管制圖追蹤之前,製程變數 X 在製程上之可能分佈有 2^d 種。這些分佈的瞬間可能轉換情形可表示為:由 $X \sim N(\mu_0, \sigma_s^2)$ 變為 $X \sim N(\mu_0, \sigma_{s'}^2)$, $\sigma_{s'}^2 \geq \sigma_s^2$, $s \subset s'$, s, s' 皆為 W 之子集合。吾人定義製程由狀態 s 轉換至狀態 s' 的瞬間移轉速率為 $r_{ss'}$ ($r_{ss'} > 0$), 將其以矩陣表示,即為母矩陣 (Infinitesimal Generator Matrix) Q ; $Q = [q_{ss'}]$, 其中

$$q_{ss'} = \begin{cases} r_{ss'} & , \text{若 } s \subset s', s' \neq \emptyset, \\ -\sum_{s' \neq s} r_{ss'} & , \text{若 } s = s', \\ 0 & , \text{其他。} \end{cases} \quad (3.1)$$

則 Q 矩陣的主對角線元素即為指數分配之參數 λ_s ; 即 $\lambda_s = \sum_{s' \neq s} r_{ss'}$ 。

另外,吾人定義狀態變數 Y'_t 為製程在時間 t 時的狀態,則連續時間馬可夫鏈 (Continuous Time Markov Chain) Y'_t , 為狀態 $1, 2, \dots, m$ 上的馬可夫過程。令

$P'_{ij}(h)$ 表已知製程開始在狀態 i 而 h 時間後停留在狀態 j 的移轉機率 (Transition Probability), 即 $P'_{ij}(h) = P(Y'_{h+t} = j | Y'_t = i), i, j = 1, 2, \dots, m$ 。將移轉機率 $P'_{ij}(h)$ 以矩陣 $P'(h)$ 表示, 即

$$P'(h) = \|P'_{ij}(h)\|_{i,j=1}^m。$$

由於移轉機率值計算不易, 故可以 Ross (1989) 所提供之近似方法逼近:

$$P'(h) = e^{Qh} = \lim_{n \rightarrow \infty} (I + Qh/n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} M^n, \quad (3.2)$$

其中 $M = (I + Qh/n)^n$ 。

為追蹤製程是否穩定, 我們需使用 S 管制圖來追蹤製程。一般使用 S 管制圖, 追蹤製程是否穩定的過程, 是在品質管制站上每隔一特定時間 h , 自製程上取一樣本, 樣本大小為 n , 而後計算此樣本之標準差, 繼而將此值描點於 S 管制圖上。倘若描點 (Plotted Points) 落在管制上限之外, 表有警訊 (Alarm) 發生, 則品管人員需展開搜尋及修理行動; 倘若描點落於管制上限之內, 則表無警訊發生, 製程再經 h 時間後繼續抽樣及檢定。而發生的警訊可能是錯誤的也可能是正確的。若製程事實上是穩定的, 但檢定結果出現警訊, 則此警訊為錯誤警訊 (False Alarm)。得到錯誤警訊之機率即為型一誤差機率 α 。若製程事實是失控, 而檢定結果出現警訊, 此警訊即正確警訊 (True Alarm), 其發生之機率即效力 (Power), $1 - \beta$ 。效力之值因製程所處狀態而異; 即 $1 - \beta = 1 - \beta_s$ 。茲將 α 及 $1 - \beta_s$ 之計算式列式於下:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(S > k\sigma_0 | \sigma = \sigma_0) \\ &= P((n-1)S^2/\sigma_0^2 > (n-1)k^2) \\ &= P(Z' > (n-1)k^2) \\ &= 1 - F_{Z'}((n-1)k^2), \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中 $Z' = (n-1)S^2/\sigma_0^2 \sim \chi_{(n-1)}^2$ 。

$$\begin{aligned} 1 - \beta_s &= P(S > k\sigma_0 | \sigma = \sigma_s) \\ &= P((n-1)S^2/\sigma_s^2 > (n-1)k^2\sigma_0^2/\sigma_s^2) \\ &= P(Z > (n-1)k^2\sigma_0^2/\sigma_s^2) \\ &= 1 - F_Z((n-1)k^2\sigma_0^2/\sigma_s^2), \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 $Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2, S \neq \emptyset$ 。

於是製程在每次抽樣及檢定終了時,可能發生的狀態為將原先狀態與二種檢定結果相結合,故共有 $2m(=b)$ 種。這 b 種狀態可分為二類:吸態(Absorbing States)及暫態(Transient States)。原先狀態和檢定結果有警訊發生需要搜尋及修理的新狀態是為吸態;而原先狀態和檢定結果無警訊發生製程可繼續運作的新狀態是為暫態。於是 b 種新狀態中有一半為暫態,另一半為吸態。吾人將 b 個狀態排列順序使得狀態 1 至 m 為暫態,狀態 $m+1$ 至 b 為吸態。再令新狀態變數 Y_t 表在間斷時間 t 的狀態為 $\tau, \tau = 1, 2, \dots, b$, 則 Y_t 為一離散時間馬可夫鏈(A Discrete Time Markov Chain)。以 $P_{\tau\tau'}(h)$ 表已知製程在 t 時間的狀態為 τ , 經過 h 時間後停留在狀態 τ' 的移轉機率;即 $P_{\tau\tau'}(h) = P(Y_{h+t} = \tau' | Y_t = \tau), \tau, \tau' = 1, 2, \dots, b$ 。又由馬可夫定理可知: (1) $P_{\tau\tau'}(h) \geq 0$, (2) $\sum_{\tau'} P_{\tau\tau'}(h) = 1$ 。

新狀態的移轉機率值 $P_{\tau\tau'}(h)$, 可由原先狀態的移轉機率值 $P'_{ij}(h)$, 結合錯誤警訊的機率(α)或效力($1 - \beta$)得出。茲將其解表示如下:

$$P_{\tau\tau'}(h) = \begin{cases} P'_{ij}(h)(1 - \alpha), & \text{若 } \tau = 1, \tau' = 1, i = j = 1, \\ P'_{ij}(h)\alpha & , & \text{若 } \tau = 1, \tau' = 1 + m, i = j = 1, \\ P'_{ij}(h)\beta_j & , & \text{若 } \tau = i, \tau' = j, i, j = 2, \dots, m, \\ P'_{ij}(h)(1 - \beta_j), & \text{若 } \tau = i, \tau' = j + m, i, j = 2, \dots, m, \\ 1 & , & \text{若 } \tau = \tau' = m + 1, \dots, b, \\ 0 & , & \text{其它。} \end{cases} \quad (3.5)$$

以 $P(h)$ 表 $P_{\tau\tau'}(h)$ 所形成之矩陣, 即 $P(h) = \|P_{\tau\tau'}(h)\|_{\tau, \tau'=1}^b$ 。此矩陣可分割成 4 個子矩陣, 即

$$P(h) = \begin{pmatrix} P_{11}(h) & P_{12}(h) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

其中, $P_{11}(h)$ 是一個 $m \times m$ 之矩陣, 其元素表已知製程為某一暫態經 h 時間後移轉至任一暫態的移轉機率; $P_{11}(h) = \|P_{\tau\tau'}(h)\|_{\tau, \tau'=1}^m$; $P_{12}(h)$ 是一個 $m \times m$ 之矩陣, 其元素表已知製程為某一暫態經 h 時間後移轉至任一吸態的移轉機率; $P_{12}(h) = \|P_{\tau\tau'}(h)\|, \tau = 1, 2, \dots, m, \tau' = m + 1, \dots, b$; $\mathbf{0}$ 是一個 $m \times m$ 之零矩陣, 其中每個元素值均為 0; \mathbf{I} 是一個 $m \times m$ 之單位矩陣, 其對角線值為 1, 其餘

元素值為 0。

4. 目標函數的推導

所謂循環時間是指製程開始處於穩定狀態,至 S 管制圖發生警訊,線上品管人員搜尋原因並修正之,使製程再度回到穩定狀態的時間。由假設(7)可知循環內之過程為一個馬可夫過程,故利用馬可夫性質,可有效的發現循環時間即是已知製程由狀態 1 (狀態 1 被定義為製程是穩定的且無警訊發生)開始至到達任一吸態的時間。

令製程變數 T_l 表製程由暫態 l 開始至到達任一吸態的時間, $l = 1, \dots, m$ 。而隨機變數 $T_{sr\tau}$ 表製程停留在狀態 τ 時搜尋和修正非隨機因素的時間。於是利用馬可夫性質吾人可得:

$$T_l \stackrel{d}{=} \begin{cases} h + T_\tau, & \text{w.p. } P_{l\tau}(h), \tau = 1, \dots, m, l = 1, \dots, m, \\ h + T_{sr\tau}, & \text{w.p. } P_{l\tau}(h), \tau = m+1, \dots, b, l = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (4.1)$$

其中符號 $\stackrel{d}{=}$ 表示等式左、右邊具有相同的分配,符號 w.p. 表示機率 (With Probability)。

所以由暫態 l 開始至到達任一吸態的平均時間 (ET_l) 可表示為:

$$ET_l = h + \sum_{\tau=1}^m P_{l\tau}(h) ET_\tau + \sum_{\tau=m+1}^b P_{l\tau}(h) ET_{sr\tau}, l = 1, \dots, m. \quad (4.2)$$

將(4.2)式以矩陣表示,可得下式。

$$M = h\mathbf{1}_m + P_{11}(h)M + P_{12}(h)M_{sr}, \quad (4.3)$$

其中 M 為 $m \times 1$ 之矩陣, M 之第 l 個元素為製程由暫態 l 開始至到達任一吸態的平均時間 ($ET_l, l = 1, \dots, m$); $\mathbf{1}_m$ 為 $m \times 1$ 之矩陣, $\mathbf{1}_m$ 中每一元素均為 1; M_{sr} 為 $m \times 1$ 之矩陣, M_{sr} 中第 j 個元素為製程停留在狀態 $m+j$ 時, $j = 1, \dots, m$, 搜尋及修正非隨機因素的平均時間 ($ET_{sr\tau}, \tau = m+1, \dots, b$); $P_{11}(h), P_{12}(h)$ 如第 2 節所定義。

將(4.3)式簡化後可得下式。

$$M = h(I - P_{11}(h))^{-1} \mathbf{1}_m + (I - P_{11}(h))^{-1} P_{12}(h) M_{sr}, \quad (4.4)$$

其中 M 的第一個元素以 M_1 表之, 即為平均循環時間 (ET)。

在獲得平均循環時間後, 我們需計算每個循環內的平均累積抽樣, 與檢定成本以獲得平均循環成本。每個循環內的平均累積抽樣, 與檢定成本, 是平均累積抽樣, 與檢定次數, 和每次抽樣與檢定成本之乘積。每個循環內的抽樣及檢定次數 N , 是隨機變數因其隨循環時間之變動而變動。由於本文假設製程在搜尋非隨機因素時仍持續運作, 而在修正時則停止運作, 故抽樣及檢定不會發生在製程修正時。令 M_s 為一個 $m \times 1$ 之矩陣, $M_s = \|ET_{sr}\|_{\tau=m+1}^b$ 。 M_s 之第 j 個元素表製程停留在狀態 $m+j$ 時, 搜尋非隨機因素的平均時間 ($ET_{s(m+j)}$), $j = 1, \dots, m$, 則每個循環內之平均抽樣及檢定次數, 可經由以 M_s 代替 M_{sr} 後的平均循環時間, 除以抽樣與檢定間隔時間 h 而導出下式。

$$EN = [(I - P_{11}(h))^{-1} \mathbf{1}_m]_1 + \frac{[(I - P_{11}(h))^{-1} P_{12}(h) M_s]_1}{h}, \quad (4.5)$$

其中 $[(I - P_{11}(h))^{-1} \mathbf{1}_m]_1$ 表 $(I - P_{11}(h))^{-1} \mathbf{1}_m$ 矩陣中的第一個元素; $[(I - P_{11}(h))^{-1} P_{12}(h) M_s]_1$ 表 $(I - P_{11}(h))^{-1} P_{12}(h) M_s$ 矩陣中的第一個元素。

平均循環成本事實上包括 (1) 平均累積抽樣及檢定成本, (2) 平均累積搜尋及修正成本, (3) 製程停留在各狀態的累積品質成本及 (4) 狀態間的累積移轉成本。而 (2)、(3) 及 (4) 之和可稱為不包括平均累積抽樣及檢定成本的平均循環成本。

為計算各個更新循環內的平均累積抽樣及檢定成本, 假設每次抽樣及檢定之成本, 為樣本大小 n 的線性函數 $a_0 + a_1 n$ 。其中 a_0 為固定成本, a_1 為變動成本, 且皆為正數。於是每個循環內的平均累積抽樣及檢定成本為: [每個循環內的平均抽樣及檢定次數 (EN)] \times [每次抽樣及檢定成本 ($a_0 + a_1 n$)]。亦即

$$[(I - P_{11}(h))^{-1} \mathbf{1}_m]_1 (a_0 + a_1 n) + \frac{[(I - P_{11}(h))^{-1} P_{12}(h) M_s]_1}{h} (a_0 + a_1 n)。 \quad (4.6)$$

接著, 我們推導不包括平均累積抽樣及檢定成本的平均循環成本。其推導的方法與推導平均循環時間一樣是利用馬可夫性質。唯在推導之前, 我們

要先知道未使用 S 管制圖前製程已知由狀態 i 開始, 經過 h 時間後, 停留在狀態 j 的平均累積成本 ($\gamma_{ij}(h)$, $i, j = 1, \dots, m$)。爲了獲得 $\gamma_{ij}(h)$ 的值, 吾人必須知道製程停留在狀態 l 時的單位時間平均成本 (\hat{c}_l), 停留在狀態 l 的平均時間及製程由狀態 i 移轉至另一狀態 j 的移轉成本 (d_{ij})。於是 $\gamma_{ij}(h)$ 可表示爲二項成本之和: 第一項爲製程由狀態 i 開始, 經過 h 時間後停留在狀態 j , 中間停留的各種可能狀態所對應的平均累積品質成本和, 以符號 $\gamma_{1ij}(h)$ 表示; 另一項爲製程由狀態 i 開始, 經過 h 時間後停留於狀態 j , 中間經過各種可能移轉狀態所對應的平均累積移轉成本和, 以符號 $\gamma_{2ij}(h)$ 表之。即

$$\begin{aligned}\gamma_{ij}(h) &= \gamma_{1ij}(h) + \gamma_{2ij}(h) \\ &= \sum_l \hat{c}_l \int_0^h P'_{il}(t) P'_{lj}(h-t) dt \\ &\quad + \sum_l \sum_{l' \neq l} \int_0^h P'_{il}(t) P'_{l'j}(h-t) q_{ll'} d_{ll'} dt, \quad t \in (0, h),\end{aligned}\quad (4.7)$$

其中

$$\begin{aligned}\gamma_{1ij}(h) &= \sum_l \hat{c}_l \int_0^h P'_{il}(t) P'_{lj}(h-t) dt, \\ \gamma_{2ij}(h) &= \sum_l \sum_{l' \neq l} \int_0^h P'_{il}(t) P'_{l'j}(h-t) q_{ll'} d_{ll'} dt\end{aligned}$$

(證明見 Yang (1993))。

我們以矩陣 Γ 表 $\gamma_{ij}(h)$ 所形成之矩陣; 即 $\Gamma = \|\gamma_{ij}(h)\|_{i,j=1}^m$ 。令 $EC_{sr\tau'}$ 表製程在狀態 τ' 的平均搜尋及修正成本, $\tau' = m+1, m+2, \dots, b$, 而矩陣 $CS = [CS_1, CS_2, \dots, CS_m]$, 其中 CS_j 爲 CS 之行向量, 其每一元素均爲 $EC_{sr\tau'}$, $\tau' = m+j, j = 1, 2, \dots, m$ 。接著, 在以 S 管制圖追蹤製程後, 若已知製程開始在狀態 τ , 經過 h 時間後, 停留在狀態 τ' 的平均累積成本爲 $C_{\tau\tau'}(h)$, $\tau = \tau' = 1, \dots, b$ 。以矩陣 C 表 $C_{\tau\tau'}(h)$ 所形成之矩陣, 即 $C = \|C_{\tau\tau'}(h)\|_{\tau,\tau'=1}^b$ 。於是 $\gamma_{ij}(h)$, $EC_{sr\tau'}$ 及 $C_{\tau\tau'}(h)$ 三者之關係可表示如下:

$$C_{\tau\tau'}(h) = \begin{cases} \gamma_{ij}(h) & , \text{當 } \tau = i, \tau' = j, i, j = 1, \dots, m, \\ \gamma_{ij}(h) + EC_{sr\tau'} & , \text{當 } \tau = i, \tau' = m+j, i, j = 1, \dots, m, \\ 0 & , \text{其他。} \end{cases}\quad (4.8)$$

將(4.8)式以矩陣表示,可得下式:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} \Gamma & \Gamma + CS \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 C_{11} 為 $m \times m$ 之矩陣且 $C_{11} = \Gamma$, C_{12} 為 $m \times m$ 之矩陣且 $C_{12} = \Gamma + CS$, $\mathbf{0}$ 為 $m \times m$ 之零矩陣。

接著,令隨機變數 ε_l 表製程由暫態 l 開始至到達任一吸態,而未含平均抽樣及檢定成本的累積成本, $l = 1, \dots, m$ 。利用馬可夫性質可得:

$$\varepsilon_l \stackrel{d}{=} \begin{cases} C_{l\tau}(h) & , \text{ w.p. } P_{l\tau}(h), \tau = m+1, \dots, b, l = 1, \dots, m, \\ C_{l\tau}(h) + \varepsilon_\tau & , \text{ w.p. } P_{l\tau}(h), \tau = 1, \dots, m, l = 1, \dots, m. \end{cases}$$

因此

$$E\varepsilon_l = \sum_{\tau=m+1}^b C_{l\tau}(h)P_{l\tau}(h) + \sum_{\tau=1}^m (C_{l\tau}(h) + \varepsilon_\tau)P_{l\tau}(h), \quad l = 1, \dots, m. \quad (4.9)$$

將(4.9)式以矩陣表示,即為

$$U = H\mathbf{1}_b + P_{11}(h)U,$$

簡化後可得

$$U = (I - P_{11}(h))^{-1}H\mathbf{1}_b, \quad (4.10)$$

其中 U 為 $m \times 1$ 之矩陣, U 之第 l 個元素為製程由暫態 l 開始至到達任一吸態而未含平均抽樣及檢定成本的平均累積成本($E\varepsilon_l, l = 1, \dots, m$), $\mathbf{1}_b$ 為 $b \times 1$ 之矩陣, $\mathbf{1}_b$ 中每一元素均為1, $P_{11}(h)$ 定義見(2.5), H 為 $m \times b$ 之矩陣, $H = [P_{ij}(h)C_{ij}(h)], i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, b$ 。是以 U 的第一個元素 U_1 即為未包括平均累積抽樣及檢定成本的平均循環成本 $E\varepsilon_1$ 。 $E\varepsilon_1$ 再加上平均累積抽樣及檢定成本即為平均循環成本(EC):

$$\begin{aligned} EC &= E\varepsilon_1 + EN(a_0 + a_1n) \\ &= U_1 + [(I - P_{11}(h))^{-1}\mathbf{1}_m]_1 \\ &\quad + \frac{[(I - P_{11}(h))^{-1}P_{12}(h)M_s]_1}{h}(a_0 + a_1n). \end{aligned} \quad (4.11)$$

利用更新報酬過程的性質，我們將平均循環成本(EC)除以平均循環時間(ET)可得到目標函數，即單位時間平均近似成本(EA_{∞})。由於平均循環時間和平均循環成本均為 S 管制圖設計參數(n, h, k)之函數，所以單位時間平均近似成本，也會是設計參數(n, h, k)的函數； $EA_{\infty} = \frac{EC}{ET} = f(n, h, k)$ 。藉著將目標函數最小化，吾人可獲得 S 管制圖的最適設計參數值(n^*, h^*, k^*)。

5. 考慮二個非隨機因素的特例

由上節，我們可知一般化目標函數的推導過程。為能更明白模式建立的詳細方法，吾人將以二個非隨機因素下 S 管制圖的設計為例說明。

在說明模式的建立之前，吾人有如下之假設：

- (1) 有興趣的品質特性 X 只有一個且呈常態分佈。當製程處於穩定狀態時，品質特性 X 之期望值為 μ_0 ，變異數為 σ_0^2 ，且均為已知常數；即 $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ 。
- (2) 系統中存在2個非隨機因素，當其中一個發生於製程上，則另一個不會再干擾製程。
- (3) 非隨機因素的發生只會影響製程變異，使製程變異數增大，而平均數不變。令當製程受第一種非隨機因素影響時，製程變異數變為 $\delta_1^2 \sigma_0^2$ ； $X \sim N(\mu_0, \delta_1^2 \sigma_0^2)$ ， $\delta_1 > 1$ 。相對的，當製程受第二種非隨機因素影響時，製程變異數變為 $\delta_2^2 \sigma_0^2$ ； $X \sim N(\mu_0, \delta_2^2 \sigma_0^2)$ ， $\delta_2 > 1$ 。
- (4) 其餘假設同第2節。

根據上述假設，我們陳列出在以 S 管制圖追蹤製程變數前，製程變數 X 在製程上的三種可能分佈：(1) $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ ，當製程穩定時；(2) $X \sim N(\mu_0, \delta_1^2 \sigma_0^2)$ ，當製程受第一種非隨機因素影響；(3) $X \sim N(\mu_0, \delta_2^2 \sigma_0^2)$ ，當製程受第二種非隨機因素影響。這三種分配相互間的瞬間轉換情形只有二種可能，其一為由 $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ 轉變為 $X \sim N(\mu_0, \delta_1^2 \sigma_0^2)$ ；其二為由 $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ 轉變為 $X \sim N(\mu_0, \delta_2^2 \sigma_0^2)$ ，其他轉換情形不可能發生。是以吾人可將製程變數在循環內任一時間點的可能分配表示為狀態(States)。此三個狀態被定義如下：

狀態1：製程穩定，無非隨機因素發生；即 $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ 。

狀態2:製程受到第一種非隨機因素影響; $X \sim N(\mu_0, \delta_1^2 \sigma_0^2)$ 。

狀態3:製程受到第二種非隨機因素影響; $X \sim N(\mu_0, \delta_2^2 \sigma_0^2)$ 。

此三個製程狀態間的瞬間可能轉換情形即是由狀態1轉換為狀態2或由狀態1轉換為狀態3;其他轉換情形則不可能。即3個狀態間的移轉速率分別為 $q_{12} = r_{12}, q_{13} = r_{13}, q_{11} = -(r_{12} + r_{13}), q_{21} = q_{22} = q_{23} = q_{31} = q_{32} = q_{33} = 0$, 將其以矩陣表示, 可得母矩陣 (infinitesimal generator matrix) Q 。

$$Q = \begin{pmatrix} -(r_{12} + r_{13}) & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

令 $P'(h)$ 表移轉機率 $P'_{ij}(h)$ 所形成之矩陣, 即 $P'(h) = \|P'_{ij}(h)\|_{i,j=1}^3$, 則移轉機率的逼近值可由 Ross(1989) 所提供的方法獲得:

$$P'(h) = e^{Qh} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{Qh}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} M^n$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-(r_{12}+r_{13})h} & \frac{r_{12}}{r_{12}+r_{13}}(1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h}) & \frac{r_{13}}{r_{12}+r_{13}}(1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h}) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

(各元素的獲得請見附錄1)。

在以 S 管制圖追蹤製程後, 將 S 管制圖檢定的二種可能結果為出現警訊或無警訊發生與原先的三個可能狀態相組合, 則製程在抽樣與檢定終了時的可能狀態共有6種, 茲將這6個狀態敘述如下:

狀態1: 製程穩定且無警訊發生。

狀態2: 製程受第一種非隨機因素影響, 但檢定結果無警訊發生。

狀態3: 製程受第二種非隨機因素影響, 但檢定結果無警訊發生。

狀態4: 製程穩定但檢定結果出現警訊, 要找尋發生警訊原因。

狀態5: 製程受第一種非隨機因素影響, 檢定結果出現警訊, 需找尋與剔除非隨機因素。

狀態6: 製程受第二種非隨機因素影響, 檢定結果出現警訊, 需找尋與剔除非隨機因素。

此6個狀態在時距是 h 間之可能轉換情形為：(1)由狀態1轉換至任何其他狀態或仍停留在狀態1；(2)由狀態2轉換至狀態5或仍停留在狀態2；(3)由狀態3轉換至狀態6或仍停留在狀態3。而6個狀態中，狀態1、2、3為暫態；狀態4、5、6為吸態。

當製程在 t 時間所處的狀態為 τ ，經過 h 時間後停留在狀態 τ' 的移轉機率 $P_{\tau\tau'}(h)$ ， $\tau, \tau' = 1, \dots, 6$ ，可由(3.5)式獲得如下：

$$\begin{aligned} P_{11}(h) &= P'_{11}(h)(1 - \alpha) = (1 - \alpha)e^{-(r_{12}+r_{13})h}, \\ P_{12}(h) &= P'_{12}(h)\beta_1 = \frac{\beta_1 r_{12}}{r_{12} + r_{13}}(1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h}), \\ P_{13}(h) &= P'_{13}(h)\beta_2 = \frac{\beta_2 r_{13}}{r_{12} + r_{13}}(1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h}), \\ P_{14}(h) &= P'_{11}(h)\alpha = \alpha e^{-(r_{12}+r_{13})h}, \\ P_{15}(h) &= P'_{12}(h)(1 - \beta_1) = \frac{(1 - \beta_1)r_{12}}{r_{12} + r_{13}}(1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h}), \\ P_{16}(h) &= P'_{13}(h)(1 - \beta_2) = \frac{(1 - \beta_2)r_{13}}{r_{12} + r_{13}}(1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h}), \\ P_{22}(h) &= P'_{22}(h)\beta_1 = \beta_1, \\ P_{25}(h) &= P'_{22}(h)(1 - \beta_1) = 1 - \beta_1, \\ P_{33}(h) &= P'_{33}(h)\beta_2 = \beta_2, \\ P_{36}(h) &= P'_{33}(h)(1 - \beta_2) = 1 - \beta_2, \\ P_{21}(h) &= P_{23} = P_{24}(h) = P_{26} = P_{31}(h) = P_{32} = P_{34}(h) = P_{35} = 0, \end{aligned}$$

其中

$$\alpha = P(S > k\sigma_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - F_{Z'}((n-1)k^2),$$

$$\text{而 } Z' = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{(n-1)}^2.$$

$$\begin{aligned} 1 - \beta_j &= P(S > k\sigma_0 | \sigma = \delta_j\sigma_0) \\ &= 1 - F_Z\left(\frac{(n-1)k^2}{\delta_j^2}\right), j = 1, 2, \end{aligned}$$

$$\text{而 } Z = \frac{(n-1)S^2}{\delta_j^2\sigma_0^2} \sim \chi_{(n-1)}^2, j = 1, 2.$$

各移轉機率滿足 $\sum_{\tau'} P_{\tau\tau'}(h) = 1$ 且 $P_{\tau\tau'}(h) \geq 0$ ， $\tau, \tau' = 1, 2, \dots, 6$ 。

接著,利用馬可夫性質,吾人可得:

$$T_l \stackrel{d}{=} \begin{cases} h + T_\tau, & \text{w.p. } P_{l\tau}(h), \tau = 1, 2, 3, l = 1, 2, 3, \\ h + T_{sr\tau}, & \text{w.p. } P_{l\tau}(h), \tau = 4, 5, 6, l = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (5.3)$$

則製程由暫態 l 開始,直到製程停留在任一吸態的平均時間($ET_l, l = 1, 2, 3$),可由(4.3)式得出為:

$$\begin{pmatrix} ET_1 \\ ET_2 \\ ET_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ h \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11}(h) & P_{12}(h) & P_{13}(h) \\ 0 & P_{22}(h) & 0 \\ 0 & 0 & P_{33}(h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ET_1 \\ ET_2 \\ ET_3 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} P_{14}(h) & P_{15}(h) & P_{16}(h) \\ 0 & P_{25}(h) & 0 \\ 0 & 0 & P_{36}(h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ET_{sr4} \\ ET_{sr5} \\ ET_{sr6} \end{pmatrix}.$$

簡化後可得:

$$ET_3 = \frac{h}{1 - \beta_2} + ET_{sr6}, \quad (5.4)$$

$$ET_2 = \frac{h}{1 - \beta_1} + ET_{sr5}, \quad (5.5)$$

$$ET_1 = \frac{h + \sum_{\tau=2}^3 P_{1\tau}(h)ET_\tau + \sum_{\tau=4}^6 P_{1\tau}(h)ET_{sr\tau}}{1 - P_{11}(h)}. \quad (5.6)$$

將(5.4)及(5.5)式代入(5.6)式可得平均循環時間(ET):

$$ET = \frac{h + \frac{h(1 - e^{-(r_{12} + r_{13})h})}{r_{12} + r_{13}} \left(\frac{\beta_1 r_{12}}{1 - \beta_1} + \frac{\beta_2 r_{13}}{1 - \beta_2} \right)}{1 - (1 - \alpha)e^{-(r_{12} + r_{13})h}} \\ + \frac{\alpha e^{-(r_{12} + r_{13})h} ET_{sr4}}{1 - (1 - \alpha)e^{-(r_{12} + r_{13})h}} \\ + \frac{\frac{r_{12}}{r_{12} + r_{13}} (1 - e^{-(r_{12} + r_{13})h}) ET_{sr5}}{1 - (1 - \alpha)e^{-(r_{12} + r_{13})h}} \\ + \frac{\frac{r_{13}}{r_{12} + r_{13}} (1 - e^{-(r_{12} + r_{13})h}) ET_{sr6}}{1 - (1 - \alpha)e^{-(r_{12} + r_{13})h}}. \quad (5.7)$$

在得到平均循環時間(ET)後,吾人可計算平均抽樣及檢定次數(EN);其為平均循環時間(ET)除以抽樣時間 h 。但因為製程在修正時需停止抽樣及檢定,所以(4.6)式中的 $ET_{sr\tau}$ 需以 $ET_{s\tau}$ 代替, $\tau = 4, 5, 6$ 。將 EN 以數學式表示為:

$$EN = \frac{h + \sum_{\tau=2}^3 P_{1\tau}(h)ET_{\tau} + \sum_{\tau=4}^6 P_{1\tau}(h)ET_{s\tau}}{h(1 - P_{11}(h))} \quad (5.8)$$

爲計算平均循環成本,我們需知 $\gamma_{ij}(h)$, $i, j = 1, 2, 3$ 。而爲了計算 $\gamma_{ij}(h)$ 我們需先知:

- (1) 移轉機率($P_{ij}^l(h)$);
- (2) 製程停留在任一狀態 l 時的單位時間成本(\hat{c}_l), $l = 1, 2, 3$;
- (3) 製程由狀態 i 移轉至狀態 j 的移轉成本(d_{ij})。

由公式(4.7)可得:

$$\begin{aligned} \gamma_{111}(h) &= \hat{c}_1 \int_0^h e^{-r_{11}t} e^{-r_{11}(h-t)} dt \\ &= \hat{c}_1 h e^{-r_{11}h}, \\ \gamma_{112}(h) &= \frac{\hat{c}_1 \int_0^h e^{-r_{11}t} r_{12} (1 - e^{-(r_{12}+r_{13})(h-t)}) dt}{r_{12} + r_{13}} \\ &\quad + \hat{c}_2 \int_0^h \frac{r_{12}}{r_{12} + r_{13}} (1 - e^{-(r_{12}+r_{13})t}) dt \\ &= \frac{(\hat{c}_1 - \hat{c}_2)r_{12}}{(r_{12} + r_{13})^2} (1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h}) \\ &\quad + \frac{r_{12}h}{r_{12} + r_{13}} (\hat{c}_2 - \hat{c}_1 e^{-(r_{12}+r_{13})h})。 \end{aligned}$$

同理

$$\gamma_{113}(h) = \frac{(\hat{c}_1 - \hat{c}_3)r_{13}}{(r_{12} + r_{13})^2} (1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h}) + \frac{hr_{13}}{r_{12} + r_{13}} (\hat{c}_3 - \hat{c}_1 e^{-(r_{12}+r_{13})h}),$$

$$\gamma_{122}(h) = \hat{c}_2 h,$$

$$\gamma_{133}h = \hat{c}_3 h,$$

$$\gamma_{121}(h) = \gamma_{123}(h) = \gamma_{131}(h) = \gamma_{132}(h) = 0,$$

$$\gamma_{212}(h) = \int_0^h e^{-(r_{12}+r_{13})t} r_{12} d_{12} dt = \frac{r_{12}d_{12}}{r_{12} + r_{13}} (1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h}),$$

$$\gamma_{213}(h) = \int_0^h e^{-(r_{12}+r_{13})t} r_{13} d_{13} dt = \frac{r_{13}d_{13}}{r_{12} + r_{13}} (1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h}),$$

$$\gamma_{211}(h) = \gamma_{221}(h) = \gamma_{222}(h) = \gamma_{223}(h) = 0,$$

$$\gamma_{231}(h) = \gamma_{232}(h) = \gamma_{233}(h) = 0。$$

因爲

$$\gamma_{ij}(h) = \gamma_{1ij}(h) + \gamma_{2ij}(h),$$

所以

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(h) &= \hat{c}_1 h e^{-(r_{12}+r_{13})h}, \\ \gamma_{12}(h) &= \frac{r_{12}[(\hat{c}_1 - \hat{c}_2) + d_{12}(r_{12} + r_{13})](1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h})}{(r_{12} + r_{13})^2}, \\ &\quad + \frac{hr_{12}}{r_{12} + r_{13}}(\hat{c}_2 - \hat{c}_1 e^{-(r_{12}+r_{13})h}), \\ \gamma_{13}(h) &= \frac{r_{13}[(\hat{c}_1 - \hat{c}_3) + d_{13}(r_{12} + r_{13})](1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h})}{(r_{12} + r_{13})^2}, \\ &\quad + \frac{hr_{13}}{r_{12} + r_{13}}(\hat{c}_3 - \hat{c}_1 e^{-(r_{12}+r_{13})h}) \\ \gamma_{22}(h) &= \hat{c}_2 h, \\ \gamma_{33}(h) &= \hat{c}_3 h, \\ \gamma_{21}(h) &= \gamma_{23}(h) = \gamma_{31}(h) = \gamma_{32}(h) = 0. \end{aligned}$$

再令 $C_{\tau\tau'}(h)$ 表以 S 管制圖追蹤製程後，製程已知開始時處於狀態 τ ，經過 h 時間後停留在狀態 τ' 的平均累積成本。於是由(4.8)式可知：

$$\begin{aligned} C_{11}(h) &= \gamma_{11}(h), & C_{16}(h) &= \gamma_{13}(h) + EC_{sr6}, \\ C_{12}(h) &= \gamma_{12}(h), & C_{22}(h) &= \gamma_{22}(h), \\ C_{13}(h) &= \gamma_{13}(h), & C_{25}(h) &= \gamma_{22}(h) + EC_{sr5}, \\ C_{14}(h) &= \gamma_{11}(h) + EC_{sr4}, & C_{33}(h) &= \gamma_{33}(h), \\ C_{15}(h) &= \gamma_{12}(h) + EC_{sr5}, & C_{36}(h) &= \gamma_{33}(h) + EC_{sr6}, \\ C_{21}(h) &= C_{23}(h) = C_{24}(h) = C_{26}(h) = C_{31}(h) = C_{32}(h) \\ &= C_{34}(h) = C_{35}(h) = 0. \end{aligned}$$

已知隨機變數 ε_l ，表製程由暫態 l 開始，至到達任一吸態的未包括平均累積抽樣及檢定成本之累積成本，根據(4.9)可得未包括平均累積抽樣及檢定成本之平均循環成本($E\varepsilon_1$)。即

$$\varepsilon_l \stackrel{d}{=} \begin{cases} C_{l\tau}(h) & , \text{ w.p. } P_{l\tau}(h), \tau = 4, 5, 6, l = 1, 2, 3, \\ C_{l\tau}(h) + \varepsilon_\tau & , \text{ w.p. } P_{l\tau}(h), \tau = 1, 2, 3, l = 1, 2, 3. \end{cases}$$

簡化上式可得：

$$E\varepsilon_2 = \frac{\hat{c}_2 h}{1 - \beta_1} + EC_{sr5},$$

$$E\varepsilon_3 = \frac{\hat{c}_3 h}{1 - \beta_2} + EC_{sr6},$$

$$E\varepsilon_1 = \frac{\sum_{\tau=1}^6 P_{1\tau}(h) \times C_{1\tau}(h) + \sum_{\tau=2}^3 P_{1\tau}(h) \times E\varepsilon_{\tau}}{1 - P_{11}(h)}. \quad (5.9)$$

$E\varepsilon_1$ 再加上循環內的平均累積抽樣與檢定成本即得平均循環成本 (EC): 即 $EC = E\varepsilon_1 + EN \times (a_0 + a_1 n)$ 。同樣的, 單位時間平均近似成本為 $EA_{\infty} = \frac{EC}{ET} = f_c(n, h, k)$, 藉著最小化目標函數, S 管制圖的最佳設計參數值可被獲得。

6. 舉例說明 S 經濟管制圖之建立與應用

本節將就第5節的特例, 舉數值例子說明最佳設計參數值的決定及 S 管制圖之建立與其在製程上之應用。由於推導出的目標函數是設計參數之函數, 故對特定參數值組合, 吾人可利用直接搜尋法獲得最小平均每小時成本。當使用 S 管制圖來追蹤製程是否穩定時, 樣本大小 n 考慮大於等於 10。因為當 n 小時, 全距是表示製程散佈 (Process Spread) 的有效指標, 而當 $n \geq 10$, 樣本標準差 S 則是表示製程散佈的一個較好之指標 (見 Spanos (1992))。在本文中假設有興趣的 n 範圍為 10 至 20, 即 $10 \leq n \leq 20$; 抽樣期間 h 最長為 8 小時; $0 \leq h \leq 8$, 此乃因為一般工作天為 8 小時, 而實務上大部分工程師都一天至少會檢查一次製程 (見 Duncan (1971))。 S 管制圖寬度 (k) 之範圍則設定至 2, 因為樣本大小範圍大於等於 10 時, k 值在此範圍的變動將使卡方分配的最大累積機率值為 0.9999604 ($\doteq 1$)。本研究將視此三個設計參數值為間斷的, 其中 n 為整數值而 h 及 k 值都取至小數點第一位。將目標函數與限制式以數學式表示則為

$$\min EA_{\infty} = f(n, h, k),$$

使得

$$0.1 \leq h \leq 8.0, \quad 0.1 \leq k \leq 2.0, \quad 10 \leq n \leq 20. \quad (6.1)$$

在特定的 n 值下, 我們找尋使目標函數 (EA_{∞}) 最小的 h 及 k 值, 再比較不同 n 值下的各個目標函數值, 由於目標函數值會隨著 n 值的增大而增加 (呈直線關係), 或是隨著 n 值的增大先減少而後增加 (呈二次曲線關係) (見 Yang (1993)), 因此最後可找到最小成本函數值, 其所對應的 n 、 h 、 k 即為最適設計參數值。茲將直接搜尋法之步驟詳述於下:

- (1) 輸入製程與成本參數值。
- (2) 令 $n^* = h^* = k^* = 0, \min EA_{\infty} = 10000$ 。
- (3) 以 (5.1) 所訂定之設計參數值範圍為搜索區域。
- (4) 設定 n 值, $n \in \{10, 11, \dots, 20\}$ 。
- (5) 設定 k 值, $k \in \{0.1, 0.2, \dots, 2.0\}$ 。
- (6) 設定 h 值, $h \in \{0.1, 0.2, \dots, 8.0\}$ 。
- (7) 對此 n 、 h 、 k 組合, 在設定的製程及成本參數值下, 計算得狀態移轉機率 $P'_{ij}(h)$ 及狀態移轉平均累積成本 $\gamma_{ij}(h)$ 。
- (8) 利用 IMSL 之副程式 CHIDF 計算得 α 、 β_1 、 β_2 之值。則結合 $P'_{ij}(h)$ 及 α 、 β_1 、 β_2 可得使用 S 管制圖後狀態移轉機率 $P_{\tau\tau'}(h)$ 。
- (9) 利用 IMSL 之副程式 mrrrr 及 linrg 計算平均循環時間 (ET) 及平均抽樣次數 (EN)。
- (10) 結合狀態移轉平均累積成本 $\gamma_{ij}(h)$ 和平均搜尋及修正成本 EC_{srr} , 以獲得 S 管制圖追蹤後的平均累積成本 $C_{\tau\tau'}(h)$ 。
- (11) 計算平均循環成本 (EC) 及單位時間之平均近似成本 $EA_{\infty} = \frac{EC}{ET}$ 。
- (12) 步驟 (11) 計算出的 EA_{∞} 若小於先前設定值 $\min EA_{\infty}$, 則令此時的 EA_{∞} 為新的 $\min EA_{\infty}$ 。此時的 n 、 h 、 k 令為 n^* 、 h^* 、 k^* , 此時的 α 、 β_1 、 β_2 令為 α^* 、 β_1^* 、 β_2^* 。
- (13) 重複步驟 (6) 至 (12)。
- (14) 重複步驟 (5) 至 (12)。
- (15) 重複步驟 (4) 至 (12)。

則最小單位時間平均成本即為 $\min EA_{\infty}$, 其所對應的 n^* 、 h^* 、 k^* 即為最適設計參數值。

在考慮二個非隨機因素下, 吾人推導得的目標函數包含製程參數與成本參

數共20個。實務上成本參數值可由公司會計部門提供或估計,而製程參數值則由有經驗的製程工程師提供。唯這些參數在實務上的數值不易蒐得,是以本研究大部分的參數值乃參考Duncan(1971)、Panagos et al.(1985)及Saniga(1979)文章中的參數值,少部分無法參考的則以常識或直覺來決定。吾人以27種參數組合(見附錄2),每組均依上述之直接搜尋法利用設計好的福傳(Fortran)程式,分別計算各組的最適樣本大小(n^*),抽樣期間(h^*),S管制圖寬度(k^*)和最小成本函數值($\min EA_\infty$)。茲將這些結果表示於表1。

歸納表1最適設計參數值與成本的結果,可知影響平均近似成本(EA_∞)的關鍵參數為 r_{12} 、 a_0 、 \hat{c}_1 、 \hat{c}_2 ;影響樣本大小(n)的關鍵參數為 δ_1 、 a_1 、 \hat{c}_2 、 EC_{sr4} ;影響管制界限寬度(k)的關鍵參數為 r_{12} 、 \hat{c}_2 、 EC_{sr4} 、 ET_{sr4} 。而這些關鍵參數的了解將可幫助決策者決定估計各參數值所需達到的準確度。

此外,為了解S管制圖之建立及應用,吾人以第14組之最適解(見表1)為例說明。由於第14組之 $n^* = 10$ 、 $h^* = 8.0$ 、 $k^* = 1.2$,所以S管制圖的上限設定為1.2,中心線為0.9727。在製程控制上,品管人員則每隔8.0小時取一個樣本,而樣本大小為10。據此10個觀測值計算樣本標準差,然後描點在S圖上,若該點落於管制上限之內,則表製程穩定,則隔8.0小時後,再取樣做檢定。但當描點落於管制上限之外,則表示製程失控,品管人員需找尋原因,並排除影響原因,使製程恢復穩定狀態,而後隔8.0小時,再取樣檢定(見圖1)。

另外,為了解此管制圖之偵測能力,我們須知製程之平均連串長度(Average Run Length;簡稱ARL)。通常當製程穩定時,我們希望平均連串長度愈大愈好,如此可減少檢查錯誤警訊的時間及成本。但當製程不穩定時,我們希望ARL愈小愈好,以便快速修正製程而使其回到穩定狀態。吾人令 ARL_0 表在製程穩定下,直到錯誤警訊發生時的平均抽樣次數,令 $ARL_j, j = 1, 2$,表製程受到第 j 種非隨機因素影響下,直到正確警訊發生時的平均抽樣次數。茲將S經濟管制圖所對應之發生錯誤警訊的機率(α),無正確警訊發生的機率($\beta_j, j = 1, 2$)及平均連串長度($ARL_j, j = 0, 1, 2$)列示於表2。

由表2觀之,吾人發現當製程穩定時S經濟管制圖發生錯誤警訊的機率為0.164,即平均只要6.1個樣本便會發生一個錯誤警訊($ARL_0=6.1$)。當製程受到第一種非隨機因素影響時($\delta_1 = 1.8$)發生正確警訊的機率為 $1 - \beta_1 = 0.911$,即平均只要1.1個樣本即可得知製程失控($ARL_1=1.1$)。同樣的,當製程受到

表1. 27種不同參數組合下的最適解

組別	最適設計參數值組合			最適成本 $\min EA_{\infty}$
	n^*	h^*	k^*	
1	13	8.0	2.0	40.2544
2	10	8.0	2.0	82.1626
3	10	8.0	0.8	102.0825
4	20	8.0	1.2	42.7695
5	15	8.0	1.3	86.6236
6	20	8.0	2.0	66.1347
7	20	8.0	1.4	39.7710
8	10	8.0	0.1	70.9281
9	10	8.0	1.4	85.1822
10	20	8.0	2.0	44.9635
11	10	8.0	0.8	48.4884
12	10	8.0	0.1	83.7201
13	10	8.0	0.1	72.9717
14	10	8.0	1.2	46.8170
15	20	8.0	1.3	81.2603
16	10	8.0	0.1	67.7595
17	10	8.0	1.2	43.8765
18	20	8.0	1.0	74.8265
19	10	8.0	2.0	66.1716
20	20	8.0	1.3	64.2551
21	10	8.0	0.1	42.2338
22	10	8.0	0.8	68.5853
23	10	8.0	0.1	63.0163
24	10	8.0	0.9	41.0977
25	10	8.0	0.1	60.1113
26	20	8.0	2.0	49.1033
27	19	8.0	1.1	41.1479

各組之製程與成本參數值參見附錄2

表2.二種管制圖各對應的設計參數值、平均每小時成本、發生誤差機率及平均連串長度

項目	S 經濟管制圖
n	10
h	8.0
k	1.2
成本	46.8175
α	0.164
β_1	0.089
β_2	0.171
ARL_0	6.1
ARL_1	1.1
ARL_2	1.2

誌謝詞: 作者感謝編輯委員們所提供的寶貴意見, 使本文更具可讀性。

參考文獻

- Alt, F. (1981). One control chart for the mean and variance. *Proceeding of Industrial Engineering Conference*, Washington, D.C., 143-145.
- Banerjee, P. and Rahim, M. (1987). The economic design of control charts : A renewal theory approach. *Engineering Optimization* **12**, 63-73.
- Besterfield, D. (1979). *Quality Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Chung, K. (1991). Economic designs of attribute control charts for multiple assignable causes. *Optimization* **22**, 775-786.
- Chung, K. and Chen, S. (1992). Joint economically optimal design of \bar{X} and S^2 control charts. *Engineering Optimization* **19**, 101-113.

- Collani, V. and Sheil, J. (1989). An approach to controlling process variability. *J. Quality Technology* **21**, 87-96.
- Duncan, A. (1956). The economic design of \bar{X} chart used to maintain current control of a process. *J. Amer. Statist. Assoc.* **51**, 228-242.
- Duncan, A. (1971). The economic design of \bar{X} charts when there is a multiplicity of assignable causes. *J. Amer. Statist. Assoc.* **66**, 107-121.
- Duncan, A. (1974). *Quality Control and Industrial Statistics*. Richard D. Irwin, Inc.
- IMSL Library (1989). *User's Manual Math/Library, Fortran Subroutines*. IMSL, Inc.
- Montgomery, D. (1980). The economic design of control charts : A review and literature survey. *J. Quality Technology* **12**, 75-86.
- Panagos, M. , Russell, H. and Montgomery, D. (1985). Economic design of \bar{X} charts : For two manufacturing models. *Naval Research Logistics Quarterly* **32**, 631-646.
- Rahim, M., Lashkari, R., and Banerjee, P. (1988). Joint economic design of mean and variance control charts. *Engineering Optimization* **14**, 65-78.
- Ross, S. (1989). *Introduction to Probability Models*. Academic Press, New York.
- Saniga, E. (1979). Joint economically optimal design of \bar{X} and R control charts. *Management Science* **24**, 420-431.
- Spanos, C. (1992). Statistical process control in semiconductor manufacturing. *Proceedings of the IEEE*. **80**, 819-830.
- Tagaras, G. and Lee, H (1988). Economic design of control charts with different control limits for different assignable causes. *Management Science* **34**, 1347-1366.

Yang, S. (1993). Economic design of joint \bar{X} and R control charts : A Markov chain method. *Journal of National Chengchi University* **66**, 445-494.

[民國83年4月18日收稿,民國83年6月28日修訂]

附錄 1.

令

$$M = I + \frac{Qh}{n} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(r_{12}+r_{13})h}{n} & \frac{r_{12}h}{n} & \frac{r_{13}h}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

則

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 & m_{13}^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} m_{11}^2 &= \left[1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right]^2, \\ m_{12}^2 &= \frac{r_{12}h}{n} \left[1 + \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right)\right], \\ m_{13}^2 &= \frac{r_{13}h}{n} \left[1 + \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

同樣的,

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} m_{11}^3 & m_{12}^3 & m_{13}^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} m_{11}^3 &= \left[1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right]^3, \\ m_{12}^3 &= \frac{r_{12}h}{n} \left[1 + \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right) + \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right)^2\right], \\ m_{13}^3 &= \frac{r_{13}h}{n} \left[1 + \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right) + \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

故

$$M^n = \begin{pmatrix} m_{11}^n & m_{12}^n & m_{13}^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^{n'} & m_{12}^{n'} & m_{13}^{n'} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
 m_{11}^n &= \left[1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right]^n, \\
 m_{12}^n &= \frac{r_{12}h}{n} \left[1 + \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right) + \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right)^2 + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right)^{n-1}\right], \\
 m_{13}^n &= \frac{r_{13}h}{n} \left[1 + \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right) + \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right)^2 + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right)^{n-1}\right], \\
 m_{11}' &= \left[1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right]^n, \\
 m_{12}' &= \frac{r_{12}}{r_{12} + r_{13}} \left[1 - \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right)^n\right], \\
 m_{13}' &= \frac{r_{13}}{r_{12} + r_{13}} \left[1 - \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right)^n\right].
 \end{aligned}$$

因此,吾人可得

$$\begin{aligned}
 P'(h) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{Qh}{n} \right) = \begin{pmatrix} p'_{11} & p'_{12} & p'_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{-(r_{12}+r_{13})h} & \frac{r_{12}}{r_{12}+r_{13}}(1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h}) & \frac{r_{13}}{r_{12}+r_{13}}(1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h}) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 p'_{11} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right]^n = e^{-(r_{12}+r_{13})h}, \\
 p'_{12} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{12}}{r_{12} + r_{13}} \left[1 - \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right)^n\right] = \frac{r_{12}}{r_{12} + r_{13}} (1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h}), \\
 p'_{13} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{13}}{r_{12} + r_{13}} \left[1 - \left(1 - \frac{(r_{12} + r_{13})h}{n}\right)^n\right] = \frac{r_{13}}{r_{12} + r_{13}} (1 - e^{-(r_{12}+r_{13})h}),
 \end{aligned}$$

附錄2.

27種不同製程與成本參數組合如下：

共同參數值： $d_{12} = 30.0, d_{13} = 50.0, EC_{sr5} = 100.0, EC_{sr6} = 120.0, ET_{s4} = 0.1667, ET_{s5} = 0.25, ET_{s6} = 0.3333, ET_{sr5} = 0.6667, ET_{sr6} = 1.0$ 。

1. 第1組： $r_{12} = 0.003, r_{13} = 0.005, \delta_1 = 1.1, \delta_2 = 1.6, a_0 = 0.5, a_1 = 0.1, \hat{c}_1 = 50.0, \hat{c}_2 = 40.0, \hat{c}_3 = 50.0, EC_{sr4} = 35.0, ET_{sr4} = 0.1667$ 。
2. 第2組： $r_{12} = 0.003, r_{13} = 0.005, \delta_1 = 1.1, \delta_2 = 1.6, a_0 = 5.0, a_1 = 1.0, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 80.0, \hat{c}_3 = 100.0, EC_{sr4} = 50.0, ET_{sr4} = 0.6$ 。
3. 第3組： $r_{12} = 0.003, r_{13} = 0.005, \delta_1 = 1.1, \delta_2 = 1.6, a_0 = 50.0, a_1 = 5.0, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 120.0, \hat{c}_3 = 200.0, EC_{sr4} = 100.0, ET_{sr4} = 0.9$ 。
4. 第4組： $r_{12} = 0.003, r_{13} = 0.01, \delta_1 = 1.4, \delta_2 = 1.9, a_0 = 0.5, a_1 = 0.1, \hat{c}_1 = 50.0, \hat{c}_2 = 80.0, \hat{c}_3 = 100.0, EC_{sr4} = 50.0, ET_{sr4} = 0.9$ 。
5. 第5組： $r_{12} = 0.003, r_{13} = 0.01, \delta_1 = 1.4, \delta_2 = 1.9, a_0 = 5.0, a_1 = 1.0, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 120.0, \hat{c}_3 = 200.0, EC_{sr4} = 100.0, ET_{sr4} = 0.1667$ 。
6. 第6組： $r_{12} = 0.003, r_{13} = 0.01, \delta_1 = 1.4, \delta_2 = 1.9, a_0 = 50.0, a_1 = 5.0, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 40.0, \hat{c}_3 = 50.0, EC_{sr4} = 35.0, ET_{sr4} = 0.6$ 。
7. 第7組： $r_{12} = 0.003, r_{13} = 0.02, \delta_1 = 1.8, \delta_2 = 2.5, a_0 = 0.5, a_1 = 0.1, \hat{c}_1 = 50.0, \hat{c}_2 = 120.0, \hat{c}_3 = 200.0, EC_{sr4} = 100.0, ET_{sr4} = 0.6$ 。
8. 第8組： $r_{12} = 0.003, r_{13} = 0.02, \delta_1 = 1.8, \delta_2 = 2.5, a_0 = 5.0, a_1 = 1.0, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 40.0, \hat{c}_3 = 50.0, EC_{sr4} = 35.0, ET_{sr4} = 0.9$ 。
9. 第9組： $r_{12} = 0.003, r_{13} = 0.02, \delta_1 = 1.8, \delta_2 = 2.5, a_0 = 50.0, a_1 = 5.0, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 80.0, \hat{c}_3 = 100.0, EC_{sr4} = 50.0, ET_{sr4} = 0.1667$ 。
10. 第10組： $r_{12} = 0.01, r_{13} = 0.005, \delta_1 = 1.4, \delta_2 = 2.5, a_0 = 0.5, a_1 = 1.0, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 40.0, \hat{c}_3 = 100.0, EC_{sr4} = 100.0, ET_{sr4} = 0.1667$ 。
11. 第11組： $r_{12} = 0.01, r_{13} = 0.005, \delta_1 = 1.4, \delta_2 = 2.5, a_0 = 5.0, a_1 = 5.0, \hat{c}_1 = 50.0, \hat{c}_2 = 80.0, \hat{c}_3 = 200.0, EC_{sr4} = 35.0, ET_{sr4} = 0.6$ 。
12. 第12組： $r_{12} = 0.01, r_{13} = 0.005, \delta_1 = 1.4, \delta_2 = 2.5, a_0 = 50.0, a_1 = 0.1, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 120.0, \hat{c}_3 = 50.0, EC_{sr4} = 50.0, ET_{sr4} = 0.9$ 。
13. 第13組： $r_{12} = 0.01, r_{13} = 0.01, \delta_1 = 1.8, \delta_2 = 1.6, a_0 = 0.5, a_1 = 1.0, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 80.0, \hat{c}_3 = 200.0, EC_{sr4} = 35.0, ET_{sr4} = 0.9$ 。

14. 第14組 : $r_{12} = 0.01, r_{13} = 0.01, \delta_1 = 1.8, \delta_2 = 1.6, a_0 = 5.0, a_1 = 5.0, \hat{c}_1 = 50.0, \hat{c}_2 = 120.0, \hat{c}_3 = 50.0, EC_{sr4} = 50.0, ET_{sr4} = 0.1667$ 。
15. 第15組 : $r_{12} = 0.01, r_{13} = 0.01, \delta_1 = 1.8, \delta_2 = 1.6, a_0 = 50.0, a_1 = 0.1, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 40.0, \hat{c}_3 = 100.0, EC_{sr4} = 100.0, ET_{sr4} = 0.6$ 。
16. 第16組 : $r_{12} = 0.01, r_{13} = 0.02, \delta_1 = 1.1, \delta_2 = 1.9, a_0 = 0.5, a_1 = 1.0, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 120.0, \hat{c}_3 = 50.0, EC_{sr4} = 50.0, ET_{sr4} = 0.6$ 。
17. 第17組 : $r_{12} = 0.01, r_{13} = 0.02, \delta_1 = 1.1, \delta_2 = 1.9, a_0 = 5.0, a_1 = 5.0, \hat{c}_1 = 50.0, \hat{c}_2 = 40.0, \hat{c}_3 = 100.0, EC_{sr4} = 100.0, ET_{sr4} = 0.9$ 。
18. 第18組 : $r_{12} = 0.01, r_{13} = 0.02, \delta_1 = 1.1, \delta_2 = 1.9, a_0 = 50.0, a_1 = 0.1, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 80.0, \hat{c}_3 = 200.0, EC_{sr4} = 35.0, ET_{sr4} = 0.1667$ 。
19. 第19組 : $r_{12} = 0.03, r_{13} = 0.005, \delta_1 = 1.8, \delta_2 = 1.9, a_0 = 0.5, a_1 = 5.0, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 40.0, \hat{c}_3 = 200.0, EC_{sr4} = 50.0, ET_{sr4} = 0.1667$ 。
20. 第20組 : $r_{12} = 0.03, r_{13} = 0.005, \delta_1 = 1.8, \delta_2 = 1.9, a_0 = 5.0, a_1 = 0.1, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 80.0, \hat{c}_3 = 50.0, EC_{sr4} = 100.0, ET_{sr4} = 0.6$ 。
21. 第21組 : $r_{12} = 0.03, r_{13} = 0.005, \delta_1 = 1.8, \delta_2 = 1.9, a_0 = 50.0, a_1 = 1.0, \hat{c}_1 = 50.0, \hat{c}_2 = 120.0, \hat{c}_3 = 100.0, EC_{sr4} = 35.0, ET_{sr4} = 0.9$ 。
22. 第22組 : $r_{12} = 0.03, r_{13} = 0.01, \delta_1 = 1.1, \delta_2 = 2.5, a_0 = 0.5, a_1 = 5.0, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 80.0, \hat{c}_3 = 50.0, EC_{sr4} = 100.0, ET_{sr4} = 0.9$ 。
23. 第23組 : $r_{12} = 0.03, r_{13} = 0.01, \delta_1 = 1.1, \delta_2 = 2.5, a_0 = 5.0, a_1 = 0.1, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 120.0, \hat{c}_3 = 100.0, EC_{sr4} = 35.0, ET_{sr4} = 0.1667$ 。
24. 第24組 : $r_{12} = 0.03, r_{13} = 0.01, \delta_1 = 1.1, \delta_2 = 2.5, a_0 = 50.0, a_1 = 1.0, \hat{c}_1 = 50.0, \hat{c}_2 = 40.0, \hat{c}_3 = 200.0, EC_{sr4} = 50.0, ET_{sr4} = 0.6$ 。
25. 第25組 : $r_{12} = 0.03, r_{13} = 0.02, \delta_1 = 1.4, \delta_2 = 1.6, a_0 = 0.5, a_1 = 5.0, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 120.0, \hat{c}_3 = 100.0, EC_{sr4} = 35.0, ET_{sr4} = 0.6$ 。
26. 第26組 : $r_{12} = 0.03, r_{13} = 0.02, \delta_1 = 1.4, \delta_2 = 1.6, a_0 = 5.0, a_1 = 0.1, \hat{c}_1 = 100.0, \hat{c}_2 = 40.0, \hat{c}_3 = 200.0, EC_{sr4} = 50.0, ET_{sr4} = 0.9$ 。
27. 第27組 : $r_{12} = 0.03, r_{13} = 0.02, \delta_1 = 1.4, \delta_2 = 1.6, a_0 = 50.0, a_1 = 1.0, \hat{c}_1 = 50.0, \hat{c}_2 = 80.0, \hat{c}_3 = 50.0, EC_{sr4} = 100.0, ET_{sr4} = 0.1667$ 。

The Development and Applications of S Economic Control Chart¹

Su-Fen Yang and Mei-Show Tsia

Graduate Institute of Statistics
National Chengchi University
Taipei, Taiwan, 11623, R.O.C.

ABSTRACT

A generalized process model, in which we consider multiple assignable causes and transition costs, shows that it is more reasonable and flexible than a single assignable cause model, or a multiple assignable causes model with constraint on the number of assignable causes that can occur. A numerical example illustrates how the design parameters are obtained, and the application of the designed S control chart. In practice, if the producer would like to maintain current control of a process with minimum cost, the economic chart could be preferable.

Key words and phrases: Control chart, assignable causes, renewal process, markov chain.

AMS 1991 subject classifications: Primary 60J20; secondary 65D15.

¹Support for this research was provided in part by the National Science Council of the Republic of China, Grant No. NSC 82-0208-M-004-003.