

少量連串生產下R管制圖之最適設計¹

楊素芬 嚴珮文

國立政治大學統計研究所

摘 要

管制圖之經濟模型首由Duncan (1956)提出。自此之後陸續有學者致力各種經濟管制圖之研究,包括 \bar{X} 管制圖、 \bar{X} 和 R 管制圖及 S 管制圖等。但單獨 R 管制圖之經濟設計目前尚無人提出。而在實務上,非機遇因素之發生是有可能只影響製程變異數,而不影響製程平均數。另外,產業也可能由於生產之產品量少或過於昂貴,或者產品的製造時間所需甚長,而使得品檢時所抽取的樣本數無法達到25個,這時若採用傳統的管制圖來分析製程,將無法顯示製程是否真正處於穩定的狀態。因此本研究首先探討少量連串生產下 R 管制圖之製作原理,並計算及整理出較完整的少量連串生產下 R 圖的管制係數表。接著假設非機遇因素只影響製程變異,運用Banerjee and Rahim (1987)的更新理論方法,建立少量連串生產下的 R 圖經濟模式,再利用最適化方法,即可求得最適設計參數值。於是,少量連串生產下的 R 經濟管制圖得以建立。最後,我們將舉一個例子來說明少量連串生產下 R 經濟管制圖之建立與應用。

¹本研究由行政院國家科學委員會贊助,計劃編號NSC 84-2121-M-004-004。

關鍵詞：管制圖，少量連串，非機遇因素，更新理論。

美國數學會分類索引：主要60K05；次要65D15。

1. 緒論

管制圖自 Shewhart 於 1931 年提出後，隨即被廣泛應用於工業上，是分析和改進製程的有效工具。傳統管制圖之設計只慮及統計層面，並未考慮經濟層面，然而抽樣與檢定成本、調查異常的相關成本等，都會受到管制圖設計參數值選擇的影響。因此，為使整個製程所花費的成本最小，又能兼顧品質完善的要求，陸續有學者致力於管制圖經濟設計的研究。Duncan 於 1956 年首先提出 \bar{X} 管制圖之經濟設計，不僅考慮統計層面，尚將管制圖營運時所發生的各項成本因素納入模式之設計中，並採用單位時間平均成本極小化的觀念來決定 \bar{X} 管制圖之設計參數值。接著，Saniga (1979) 提出 \bar{X} 和 R 聯合管制圖之經濟設計，他認為同時使用 \bar{X} 和 R 管制圖會比單獨使用一個管制圖更合理地解釋整個製程。而後，Banerjee and Rahim (1987) 提出以更新理論推導經濟管制圖，其假設製程只受單一非機遇因素 (assignable cause) 影響，且在第一次抽樣與檢定期間末了，觀察製程所處的可能狀態，共有 4 種。根據這 4 種狀態的定義，可求出每個狀態發生的機率、平均殘差循環時間及第一次抽樣與檢定期間的成本和平均殘差循環成本，繼而導出更新方程式 (renewal equation)，並以此求出平均循環時間 (cycle time) 與平均循環成本 (cycle cost)，最後可得單位時間平均成本函數。再經由最適化技巧，即可獲得最適設計參數值，經濟管制圖即可建立。唯這些管制圖之建立都只考慮產品生產型態是單一且大量之生產，忽略了實務上有可能是單一少量的生產型態。亦即傳統上，在建立管制圖時，樣本數被要求至少為 25。然而，現實社會中有許多工業如精密或航太工業等，所生產出來的產品可能價值不菲，不容許產品於抽檢中可能造成的破壞；或生產的產品數量太少，以致於所抽檢的樣本數根本無法達到 25 個；此時若仍使用傳統的管制圖，必定會產生不可靠的管制界限。Hillier (1969) 提出當樣本數少時， \bar{X} 和 R 管制界限之決定方法；即當樣本數小於 25 時，管制圖之管制界限的構建必須分兩個階段進行；在這二個階段，分別給予固定的型一誤差機率值、樣

本數及樣本大小後,即可求出相對應的管制係數。唯 Hillier 於文中所附的管制係數表是將樣本大小固定為 5, 並搭配 16 種不同的型一誤差機率值與樣本數計算整理而成。然而樣本大小若不是 5 時, 則無法採用該表, 因而使用上有限制。而後, Pyzdek (1993) 曾提出少量連串 (small runs) 和短程 (short runs) 的製程管制。Pyzdek 在文中所附之少量連串生產下 \bar{X} 與 R 管制圖之管制係數表的製作方式與 Hillier 的管制係數表略為不同, 但原理相同。他設定型一誤差機率值為 0.0027, 並搭配 13 種樣本數和 5 種樣本大小計算整理而成。比較 Hillier 和 Pyzdek 所提出的管制係數表, Pyzdek 的管制係數表適用較廣, 但是他所搭配的樣本數與樣本大小仍嫌不足, 無法廣泛地被適用於各種情形。是以本研究以數值分析方法, 求出不同樣本數 (小於 25) 和樣本大小 (小於 20) 下的 \bar{X} 與 R 管制圖之管制係數表, 以供業者參考應用。另外, 經濟 R 管制圖之設計至目前尚無學者提出, 故本研究將接著探討少量連串生產下 R 管制圖的經濟設計。最後, 將就少量連串生產下 R 經濟管制圖之設計舉例說明。

2. 少量連串生產下 R 管制係數之建立

傳統上使用管制圖來追蹤一個計量型的品質特性是否發生變異時, 通常會選用 R 管制圖。Hillier (1969) 所建立的少量連串生產下的 R 管制圖, 其建立過程必須分成二個階段進行; 第一個階段的要旨是搜集少量連串的樣本並依此構建最初的管制圖, 以測試這些樣本是否在管制狀態之下, 倘若描點顯示製程穩定, 則需建立第二階段的管制圖以追蹤未來製程狀態。而第二階段建立管制圖的要旨則是偵測未來製程是否仍是穩定的。為使兩個階段的管制圖都能有一致的型一誤差機率值, 我們需推導出管制圖在兩個階段的管制係數。在推導公式之前, 我們做如下的假設:

- (1) 假設品質特性值 X 是計量的, 並呈常態分配, 期望值是 μ , 變異數是 σ^2 。以數學符號表示, 則為 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。
- (2) 第一階段抽取的樣本數為 m , 樣本大小為 n 。以數學符號 X_{ij} 表示第 i 個樣本的第 j 個觀察值。 X_{ij} 互為獨立, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ 。
- (3) 令第 k 個樣本的平均數為 \bar{X}_k , 全距 (range) 為 $R_k, k = 1, 2, \dots, m$; 所有

樣本平均數 \bar{X} 為, 全距平均數為 \bar{R} 。

- (4) 由於 R 管制圖中的 R 值愈小表示製程變異愈小, 故本研究將不設置 R 管制圖的管制下限, 而只設置管制上限 (Yang (1993))。在此管制圖結構下, 描點落於管制上限以上的機率為型一誤差機率, 令其為 α_2 。
- (5) R 管制圖於第一階段的管制上限係數令為 D_{4F} , 於第二階段的管制上限係數令為 D_{4S} 。

在以上的假設下, 我們即可以統計方法推導出少量連串生產下 R 管制圖於第一階段的管制界限上限為

$$UCL = D_{4F}\bar{R},$$

而

$$D_{4F} = \frac{\frac{q_{1-\alpha_2, \nu}}{c} m}{m - 1 + \frac{q_{1-\alpha_2, \nu}}{c}},$$

其中, c 和 ν 決定於 $m - 1$ 和 n , 而 $q_{1-\alpha_2, \nu}$ 表示累積機率為 $1 - \alpha_2$, 自由度為 ν 的 Studentized Range 分配之臨界值。

而少量連串下 R 管制圖於第二階段之管制上限為

$$UCL = D_{4S}\bar{R},$$

而

$$D_{4S} = \frac{q_{1-\alpha_2, \nu}}{c},$$

其中, c 和 ν 決定於 $m - 1$ 和 n , 而 $q_{1-\alpha_2, \nu}$ 表示累積機率為 $1 - \alpha_2$, 自由度為 ν 的 Studentized Range 分配之臨界值。

由於 Hillier 與 Pyzdek 所做的管制係數表不足以適用各種狀況, 故本研究運用數值分析方法中的 Simpson 法和正割法估計在兩個階段下, 型一誤差機率分別為 0.00135 和 0.0027 且 $m \leq 25, n \leq 20$ 時之各種少量連串生產下 R 管制圖管制係數值 (見表 2.1 及表 2.2, 其它係數值請見楊素芬 (1995))。這些係數表之建立可提供更廣泛的應用。

表2.1 α 值為0.0027時的 D_{4F} 表

n/m	2	3	4	5	6	7	8
2	1.988	2.750	3.165	3.548	3.491	3.557	3.550
3	1.897	2.307	2.472	2.553	2.600	2.632	2.654
4	1.793	2.062	2.170	2.227	2.262	2.286	2.304
5	1.712	1.917	2.003	2.050	2.080	2.101	2.117
6	1.651	1.822	1.896	1.938	1.966	1.985	1.999
7	1.604	1.755	1.822	1.860	1.885	1.903	1.917
8	1.567	1.704	1.766	1.802	1.826	1.843	1.856
9	1.538	1.664	1.723	1.757	1.780	1.796	1.808
10	1.513	1.632	1.687	1.720	1.742	1.757	1.769
11	1.493	1.605	1.658	1.689	1.710	1.725	1.736
12	1.475	1.582	1.633	1.663	1.683	1.698	1.709
13	1.460	1.562	1.611	1.640	1.659	1.674	1.684
14	1.446	1.545	1.592	1.620	1.639	1.652	1.663
15	1.434	1.529	1.575	1.602	1.620	1.634	1.644
16	1.423	1.516	1.560	1.586	1.604	1.617	1.627
17	1.414	1.503	1.546	1.572	1.589	1.601	1.611
18	1.405	1.492	1.534	1.559	1.576	1.588	1.597
19	1.397	1.482	1.523	1.547	1.563	1.575	1.584
20	1.390	1.473	1.512	1.536	1.552	1.563	1.572
n/m	9	10	11	12	13	14	15
2	3.634	3.654	3.671	3.685	3.694	3.703	3.709
3	2.672	2.684	2.694	2.703	2.709	2.716	2.724
4	2.318	2.328	2.337	2.344	2.350	2.355	2.403
5	2.129	2.139	2.147	2.154	2.159	2.164	2.168
6	2.011	2.020	2.026	2.033	2.038	2.043	2.046
7	1.928	1.936	1.943	1.948	1.953	1.957	1.961
8	1.866	1.874	1.880	1.886	1.890	1.893	1.898
9	1.818	1.825	1.832	1.837	1.841	1.846	1.849
10	1.778	1.786	1.792	1.797	1.801	1.806	1.809
11	1.745	1.752	1.758	1.763	1.768	1.772	1.776
12	1.717	1.724	1.730	1.734	1.739	1.743	1.745
13	1.693	1.699	1.705	1.710	1.714	1.718	1.720
14	1.671	1.678	1.683	1.688	1.691	1.695	1.698
15	1.651	1.658	1.663	1.668	1.671	1.675	1.677
16	1.634	1.640	1.645	1.650	1.653	1.657	1.660
17	1.619	1.625	1.629	1.634	1.637	1.640	1.644
18	1.604	1.610	1.615	1.619	1.622	1.625	1.629
19	1.591	1.597	1.602	1.605	1.609	1.612	1.615
20	1.579	1.584	1.589	1.593	1.596	1.600	1.603

n\m	16	17	18	19	20	21	22
2	3.710	3.717	3.730	3.728	3.731	3.737	3.735
3	2.727	2.730	2.733	2.736	2.737	2.736	2.741
4	2.363	2.367	2.373	2.375	2.376	2.379	2.379
5	2.171	2.174	2.178	2.180	2.182	2.184	2.185
6	2.050	2.053	2.055	2.058	2.060	2.062	2.063
7	1.964	1.966	1.968	1.971	1.973	1.974	1.977
8	1.901	1.904	1.906	1.908	1.911	1.912	1.913
9	1.852	1.855	1.858	1.858	1.860	1.862	1.863
10	1.813	1.813	1.816	1.818	1.820	1.822	1.824
11	1.777	1.780	1.782	1.785	1.787	1.787	1.788
12	1.748	1.751	1.753	1.756	1.756	1.757	1.758
13	1.723	1.725	1.728	1.728	1.730	1.732	1.733
14	1.701	1.704	1.703	1.706	1.707	1.708	1.709
15	1.681	1.682	1.684	1.685	1.686	1.687	1.690
16	1.663	1.664	1.665	1.667	1.668	1.670	1.672
17	1.647	1.647	1.649	1.650	1.652	1.654	1.655
18	1.630	1.632	1.634	1.634	1.637	1.639	1.640
19	1.616	1.618	1.619	1.622	1.623	1.625	1.627
20	1.604	1.605	1.607	1.609	1.611	1.613	1.613
n\m	23	24	25				
2	3.742	3.743	3.740				
3	2.742	2.750	2.747				
4	2.382	2.383	2.383				
5	2.187	2.186	2.190				
6	2.065	2.066	2.067				
7	1.977	1.979	1.981				
8	1.915	1.918	1.917				
9	1.865	1.866	1.867				
10	1.826	1.825	1.826				
11	1.789	1.790	1.791				
12	1.759	1.761	1.761				
13	1.733	1.734	1.735				
14	1.710	1.713	1.714				
15	1.691	1.693	1.694				
16	1.673	1.674	1.676				
17	1.657	1.658	1.660				
18	1.642	1.642	1.643				
19	1.627	1.628	1.629				
20	1.614	1.616	1.617				

表2.2 α 值為0.0027時的 D_{4s} 表

n/m	1	2	3	4	5	6	7
2	161.299	21.984	11.372	9.778	6.958	6.198	5.583
3	18.437	6.664	4.851	4.173	3.825	3.616	3.476
4	8.678	4.397	3.556	3.211	3.025	2.910	2.832
5	5.939	3.541	3.008	2.780	2.654	2.574	2.519
6	4.725	3.094	2.704	2.532	2.436	2.375	2.332
7	4.051	2.818	2.509	2.370	2.291	2.241	2.206
8	3.623	2.630	2.372	2.254	2.187	2.144	2.115
9	3.327	2.492	2.269	2.167	2.108	2.071	2.044
10	3.109	2.385	2.188	2.097	2.045	2.011	1.988
11	2.942	2.301	2.123	2.041	1.993	1.962	1.940
12	2.809	2.231	2.069	1.993	1.949	1.921	1.901
13	2.701	2.173	2.023	1.953	1.911	1.885	1.867
14	2.609	2.122	1.983	1.917	1.879	1.854	1.837
15	2.533	2.079	1.948	1.886	1.850	1.827	1.810
16	2.468	2.042	1.918	1.858	1.824	1.802	1.787
17	2.410	2.008	1.890	1.834	1.801	1.780	1.765
18	2.361	1.979	1.866	1.812	1.781	1.760	1.746
19	2.317	1.952	1.844	1.792	1.762	1.742	1.728
20	2.279	1.929	1.824	1.774	1.745	1.725	1.712
n/m	8	9	10	11	12	13	14
2	5.418	5.183	5.009	4.875	4.764	4.675	4.599
3	3.377	3.302	3.243	3.198	3.159	3.129	3.106
4	2.775	2.731	2.698	2.670	2.649	2.629	2.671
5	2.479	2.448	2.425	2.406	2.390	2.377	2.365
6	2.301	2.278	2.258	2.243	2.231	2.221	2.211
7	2.181	2.160	2.145	2.132	2.122	2.113	2.105
8	2.093	2.076	2.062	2.051	2.042	2.033	2.028
9	2.024	2.010	1.998	1.988	1.980	1.974	1.968
10	1.970	1.957	1.946	1.937	1.930	1.925	1.920
11	1.925	1.912	1.903	1.895	1.888	1.884	1.880
12	1.886	1.875	1.866	1.859	1.853	1.849	1.843
13	1.853	1.842	1.834	1.827	1.822	1.819	1.814
14	1.824	1.814	1.806	1.800	1.795	1.791	1.787
15	1.798	1.789	1.781	1.776	1.770	1.766	1.763
16	1.775	1.766	1.759	1.754	1.749	1.745	1.742
17	1.754	1.746	1.739	1.734	1.729	1.725	1.723
18	1.736	1.727	1.720	1.715	1.711	1.708	1.705
19	1.718	1.710	1.704	1.699	1.695	1.691	1.689
20	1.702	1.694	1.689	1.684	1.680	1.677	1.675

n\m	15	16	17	18	19	20	21
2	4.527	4.477	4.443	4.394	4.357	4.330	4.294
3	3.081	3.061	3.043	3.028	3.012	2.996	2.989
4	2.600	2.588	2.581	2.571	2.562	2.555	2.546
5	2.355	2.347	2.340	2.332	2.327	2.321	2.316
6	2.204	2.197	2.191	2.186	2.181	2.177	2.173
7	2.098	2.093	2.087	2.083	2.079	2.075	2.074
8	2.023	2.018	2.014	2.010	2.007	2.004	2.000
9	1.964	1.960	1.957	1.951	1.948	1.946	1.943
10	1.917	1.911	1.907	1.905	1.902	1.900	1.898
11	1.874	1.871	1.868	1.866	1.864	1.860	1.857
12	1.840	1.837	1.835	1.833	1.829	1.826	1.824
13	1.810	1.807	1.806	1.801	1.799	1.797	1.795
14	1.784	1.782	1.777	1.775	1.773	1.771	1.769
15	1.761	1.757	1.754	1.752	1.750	1.747	1.747
16	1.740	1.736	1.733	1.731	1.729	1.728	1.727
17	1.721	1.716	1.714	1.712	1.711	1.710	1.708
18	1.702	1.699	1.697	1.694	1.694	1.693	1.692
19	1.685	1.683	1.681	1.680	1.679	1.677	1.677
20	1.671	1.669	1.666	1.666	1.664	1.664	1.662
n\m	22	23	24	25			
2	4.275	4.250	4.222	4.206			
3	2.978	2.976	2.963	2.955			
4	2.542	2.536	2.529	2.526			
5	2.312	2.304	2.304	2.301			
6	2.170	2.166	2.163	2.161			
7	2.069	2.066	2.065	2.062			
8	1.999	1.997	1.993	1.993			
9	1.942	1.939	1.937	1.936			
10	1.897	1.893	1.891	1.889			
11	1.856	1.854	1.852	1.851			
12	1.822	1.821	1.819	1.818			
13	1.793	1.791	1.790	1.790			
14	1.767	1.768	1.767	1.765			
15	1.746	1.745	1.744	1.743			
16	1.726	1.725	1.724	1.724			
17	1.708	1.707	1.706	1.704			
18	1.691	1.689	1.688	1.687			
19	1.675	1.674	1.673	1.672			
20	1.661	1.660	1.659	1.659			

3. 少量連串生產下R管制圖之最適設計

本節將運用前節所推導的結果來探討在少量連串生產下,如何設計具有最低成本之R管制圖,即由經濟觀點設計少量連串生產下的R管制圖。首先,在建立製程成本模式前,我們做如下之假設:

- (1) 有興趣的產品品質特性為計量的(即可測量的),令此變數為 X 。當製程處於穩定狀態時,其分配服從常態,並令其平均值是 μ_0 ,變異數是 σ_0^2 。 μ_0 及 σ_0^2 之值皆為未知之固定數。用數學符號表示,即為 $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ 。
- (2) 此系統只存在一個非機遇因素。
- (3) 此非機遇因素發生於製程的時間(T_0)服從指數分配,令其參數是 $\lambda_0 (> 0)$;即 $T_0 \sim exp(\lambda_0)$ 。
- (4) 一旦非機遇因素發生時,不經人為的修理或調整,不會自動離開。
- (5) 此非機遇因素發生時,只會使製程變異數增大,不會影響其製程平均值。而此時製程變數的分佈已改變,可表示為 $X \sim N(\mu_0, \delta^2 \sigma_0^2)$, $\delta^2 > 1$ 。
- (6) 製程開始時都處於穩定狀態(in control),直到非機遇因素於製程上被發現並剔除後製程才恢復穩定狀態。這段時間稱之為循環時間(cycle time)。循環時間彼此互相獨立且具有相同的分配。於是整個製程可視為是一連串的循環,亦即製程被表示為更新過程(a renewal process)。而在每個循環時間內所發生的累積成本稱之為循環成本(cycle cost)。循環成本彼此間亦是互相獨立且具有相同的分配。此種考慮成本之製程即為更新報酬過程(renewal reward process) (Ross (1989))。
- (7) 假設抽樣與檢定的時間很短,故予以忽略(見Yang (1993))。
- (8) 每次抽樣與檢定的成本為樣本大小(以 n 表示)之線性函數,令其為 $a_0 + a_1 n$,其中 $a_0 > 0, a_1 > 0$ 。

- (9) 當製程處於不穩定狀態(out of control)時,假設找尋及修理非機遇因素的時間為 T_{sr_1} 。當製程處於穩定狀態時,則令其為 T_{sr_0} 。其中 T_{sr_1} 及 T_{sr_0} 皆為已知。
- (10) 當製程處於不穩定狀態時,假設找尋及修理非機遇因素的成本為 C_{sr_1} 。當製程處於穩定狀態時,則令其為 C_{sr_0} 。其中 C_{sr_1} 及 C_{sr_0} 皆為已知。
- (11) 當製程處於不穩定狀態時,單位時間的品質成本以 c_1 表示。當製程處於穩定狀態時,則令其為 c_0 。
- (12) 本研究是以 R 管制圖追蹤製程是否穩定,為配合少量連串管制係數之查詢,將型一誤差之機率固定為0.0027,故管制界限為已知。所以 R 管制圖之設計參數只有樣本大小(n),與抽樣期間(h)。
- (13) 假設製程是不連續的,即當品管人員尋找及修理非機遇因素時,製程立即停止運作。

由第二節的內容可知,少量連串生產下第一階段所建立的管制圖是試用(trial)管制圖,所以在此階段下所抽取的樣本必須是製程穩定下的樣本。由於模式較簡單,且與第二階段之成本模式推導方法相同,在此不另做說明。為利用更新方程式方法(Banerjee and Rahim (1987))推導出平均循環時間($E(T)$)以及平均循環成本($E(C)$),須在製程第一次抽樣與檢定終了時,觀察可能出現的狀態。而在第二階段製程可能出現的狀態共有四種。茲將這四種狀態定義如下:

狀態一: 製程呈穩定狀態,且無任何警訊發生。

狀態二: 製程呈穩定狀態,但檢定結果有錯誤警訊發生。

狀態三: 製程受到非機遇因素的影響,但檢定結果並無警訊發生。

狀態四: 製程受到非機遇因素的影響,且檢定結果有真實警訊發生。

接著,我們需計算各個狀態下的平均殘差循環時間及其所對應之機率,如表3.1所示:

表3.1 第二階段下各狀態之機率及平均殘差循環時間表

狀態	機率	平均殘差循環時間
一	$P_1 = 0.9973e^{-\lambda_0 h}$	$T_1 = E(T)$
二	$P_2 = 0.0027e^{-\lambda_0 h}$	$T_2 = T_{sr0}$
三	$P_3 = (1 - e^{-\lambda_0 h})\beta$	$T_3 = \frac{h}{1-\beta} + T_{sr1}$
四	$P_4 = (1 - e^{-\lambda_0 h})(1 - \beta)$	$T_4 = T_{sr1}$

其中, $\beta = P(R \leq D_{4S} \bar{X} | \sigma = \delta\sigma_0)$ 。

於是,更新方程式為

$$E(T) = h + \sum_{i=1}^4 P_i T_i = h + P_1 E(T) + \sum_{i=2}^4 P_i T_i。$$

簡化上式之後可得到平均循環時間之表示式:

$$E(T) = \frac{h}{1 - P_1} + \frac{\sum_{i=2}^4 P_i T_i}{1 - P_1}。$$

在第二階段下,各狀態在第一次抽樣與檢定期間發生之成本、平均殘差循環成本、總成本及所對應之機率值計算後列於表3.2。

表3.2 第二階段下各狀態之機率及成本

狀態	機率	第一次抽樣與定期 檢定期間成本(1)	平均殘差循環 成本(2)	總成本 (1)+(2)
一	$P_1 = 0.9973e^{-\lambda_0 h}$	$a_0 + a_1 n + c_0 h$	$E(T)$	R_1
二	$P_2 = 0.0027e^{-\lambda_0 h}$	$a_0 + a_1 n + c_0 h$	C_{sr0}	R_2
三	$P_3 = (1 - e^{-\lambda_0 h})\beta$	$a_0 + a_1 n + c_0 \tau$ $+ c_1(h - \tau)$	$\frac{a_0 + a_1 n + c_1 h}{1 - \beta}$ $+ C_{sr1}$	R_3
四	$P_4 = (1 - e^{-\lambda_0 h})(1 - \beta)$	$a_0 + a_1 n + c_0 \tau$ $+ c_1(h - \tau)$	C_{sr1}	R_4

表中的 τ 指已知非機遇因素發生於第一次抽樣和檢定期間內,該非機遇因素的平均發生時間,亦即

$$\tau = E(T_0 | T_0 < h) = \frac{1 - (1 + \lambda_0 h)e^{-\lambda_0 h}}{\lambda_0(1 - e^{-\lambda_0 h})} \approx h\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_0 h}{12}\right),$$

詳見 Montgomery (1982)。

於是我們可得到更新方程式：

$$E(C) = P_1[a_0 + a_1n + c_0h + E(C)] + \sum_{i=2}^4 P_i R_i \circ$$

簡化上式之後可得到平均循環成本之表示式：

$$E(C) = \frac{a_0 + a_1n + c_0h}{1 - P_1} + \frac{\sum_{i=2}^4 P_i R_i}{1 - P_1} \circ$$

接著利用更新報酬過程的重要性質，可推導出平均單位時間成本 (EA)，其近似於平均循環成本除以平均循環時間，即 $EA \approx EC/ET$ 。由於平均循環成本和平均循環時間皆是設計參數值中的樣本大小 (n) 與抽樣期間 (h) 的函數，所以 EA 亦是樣本大小和抽樣期間的函數。再經由最適化過程後，可得到最適設計參數值 n^* 和 h^* ，於是少量連串情形下第一、二階段之最適 R 管制圖得以建立。

4. 舉例說明

本節將以數值例子說明我們在前節所建立的模式之應用。為了解少量連串生產下 R 經濟管制圖的建立與應用，我們以參數配置為 $\lambda_0 = 0.05, \delta = 1.5, a_0 = 5, a_1 = 5, c_0 = 50, c_1 = 100$ 之資料組為例說明，並假設樣本數為 15 且樣本的平均全距為 2.5，型一誤差機率值為 0.0027，且在第一階段時顯示製程處於穩定狀態，那麼就可開始製作第二階段的管制圖來偵測未來製程之變異情形。經由直接搜尋法 (direct search method) 可獲得，最適 n 為 4，最適 h 為 1.96。因此，少量連串生產下 R 經濟管制圖於第二階段的中心線為 $\bar{R} = 2.5$ ，管制上限為 $D_{4S}\bar{R} = 6.5$ (此時 D_{4S} 為 2.6)。是以未來品管人員應每隔 1.96 小時取一樣本，樣本大小為 4，再將此樣本的全距描點於第二階段 R 經濟管制圖上，若該點落在管制上限內，則表示製程是處於穩定狀態，而後每隔 1.96 小時，再取樣作檢定。若此描點落在管制上限外，則表示製程可能處於不穩定狀態，此時品管人員應立即尋找失控原因，並加以排除，使製程恢復穩定狀態，而後每隔 1.96 小時，再取樣作檢定 (見圖 1)。

5. 結論與建議

本研究是利用統計方法與數值分析方法來計算得少量連串生產下R管制圖之各種管制係數值。由於第一階段與第二階段管制係數之關係為 $D_{4F} = \frac{mD_{4S(m-1)}}{m-1+D_{4S(m-1)}}$ ，其中 $D_{4S(m-1)}$ 表 D_{4S} 公式中之 c 和 v 值決定於 $m-1$ 和 n 。(Hillier (1969))。因此可發現R管制圖的 D_{4F} 與 D_{4S} 值會隨著 m, n 值愈大，而差距愈小。而傳統上建立Shewart管制圖時會要求樣本數必須大於或等於25是有其道理的。在實務應用上，若樣本數不足25個，且製程能符合本研究的假設，則利用本研究所整理的管制係數表，即可獲得較為可靠的管制係數，進而可準確地偵測製程是否處於穩定之下。

另外，本研究尚運用更新理論方法探討在一個非機遇因素時，少量連串生產下R管制圖之最適設計。此方法不僅可應用於其他管制圖在少量連串下的設計，亦可擴展本方法，進一步研究二個非機遇因素時，少量連串生產下R管制圖之最適設計。實務上，當生產型態是單一產品且量少的情形下，使用少量連串生產下的管制圖才能正確的追蹤製程是否穩定，且業者若希望以最小成本維持製程之穩定，則宜使用少量連串下的經濟管制圖。

圖1. 少量連串生產下第二階段的R管制圖

參考文獻

- 楊素芬(1995). 少量多樣生產下的管制政策。國科會專題研究計劃成果報告, 計劃編號NSC 84-21-21-M-004-004。
- Banerjee, P. K and Rahim, M. A. (1987). The economic design of control charts: a renewal theory approach. *Engineering Optimization* **12**, 63-73.
- Duncan, A. (1956). The economic design of \bar{X} chart used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association* **51**, 228-242.
- Hillier, F. S. (1969). \bar{X} - and R - chart control limits based on a small number of subgroups. *Journal of Quality Technology* **1**, 17-26.
- Montgomery, D. C. (1982). Economic design of an \bar{X} control chart. *Journal of Quality Technology* **14**, 40-43.
- Pyzdek, T. (1993). Processes control for short and small runs. *Quality Progress* **12**, 51-60.
- Ross, S. (1989). *Introduction To Probability Models*. Academic Press. San Diago, CA..
- Saniga, E. (1979). Joint economically optimal design of \bar{X} and R control chart. *Management Science* **24**, 420-431.
- Shewhart, W. (1931). *Economic Control of Quality of Manufactured Products*. D. Van Nostrand Company, Inc. New York.
- Yang, S. (1993). Economic design of joint \bar{X} and R control charts: a markov chain method. *Journal of National Chengchi University* **66**, 445-494.

The Optimal Design of R Control Chart for Small Production Runs

Su-Fen Yang and Pei-Wen Yen¹

Graduate Institute of Statistics

National Chengchi University

Taipei, Taiwan, 11623, R.O.C.

ABSTRACT

Economic design of control charts was first addressed by Duncan (1956). So far, the economic design of R control chart has not been considered. In this paper we consider the optimal design of R control chart for small production runs. For various combinations of the number of samples and the size of each sample, control coefficients of R control chart are calculated by numerical methods. Using these results, an optimal design of R control chart for small runs is developed to monitor the process variability correctly. Finally, the development and applications of the economic R chart are illustrated by an example.

Key words and phrases: Assignable causes, control charts, small runs, renewal theory.

AMS 1991 subject classifications: Primary 60K05; secondary 65D15.

¹Support for this research was provided in part by the National Science Council of the Republic of China, Grant No. NSC-84-2121-M-004-004.