

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

年級因素對學童解讀線段圖之影響

The Effects of Grade Level on Children's Understanding of Line Segment Drawings

計畫編號：NSC 89-2413-H-004-005

執行期限：88年8月1日至89年7月31日

主持人：蔣治邦 國立政治大學心理系

一、中文摘要

本研究在加減運算範圍內，探討中年級學童進行文字題與線段圖間轉譯的能力，以及線段圖在解題過程中的角色。實驗一透過四個年級時段 465 個學童的測試，發現在改變 合併 比較與等化問題情境下，學童由文字題選擇適當線段圖的作業表現，有年級時段間的差異，但單、雙線段圖的型式並未影響表現；實驗二使用與實驗一相同的文字題，對三、四年級下學期學童 236 人進行解題測試，四下學童在各類問題上的表現優於三下，而且在合併問題上，附加線段圖對三下學童的助益大於四下，在等化問題上，附加線段圖對四下學童的助益大於三下；實驗三進行文字題判斷作業，要求學童依據給定的線段圖，判斷文字題是否呈現相同的數量關係，經由對三、四年級下學期學童 222 人的測試，除了年級效果外，亦發現三下學童在雙線段圖型式下，判斷改變文字題對錯時，表現得較單線段圖差，而四下學童在兩種線段圖型式上的表現則較為相近。比對實驗一、二的結果，顯示解題能力優於轉譯能力，綜合實驗一、三的結果，顯示文字題與線段圖間轉譯的能力，尚有加強的空間。

關鍵詞：線段圖，認知發展，加減法文字題。

Abstract

Using addition and subtraction word

problem, this study was to explore middle grade children's abilities of making translation between text and line-segment-drawings, and to explore the effects of drawings in the problem solving processes. In Experiment 1, four types of word problems (change, combine, compare and equalizing) and two forms of drawings (single line segment vs. double line segment) was chosen. With a multiple choice task format, students were asked to choose a correct drawing that is agreed with the word problem specified. There were 465 third and fourth graders in the experiment. They were tested either in first or second semester. Based on their grade level and the time tested, four groups of students were formed. Group effects were found in all types of word problems. However, the forms of drawings did not affect students' performance on the drawing choice task. In Experiment 2, the same word problems were used to explore the effects of drawings in solving the problems. There were 236 third and fourth graders included. The experiment was hold in their second semester. Grade effects were found in all types of word problems. Interaction effects revealed that the effect of additional drawings on combine problems on third graders' performance was greater than fourth graders, and the effect of additional drawings on equalizing problems on fourth graders' performance was greater than third graders. In Experiment 3, 222 third and fourth graders participated in a judgement task in their second semester. The students were asked to make judgements that whether word problems were agreed with the given

drawings. Besides of the grade effects, it was found that third graders did better on change problem under single line segment drawing condition rather than under double line segment condition, and the size of this effect was diminished in fourth grade. Contrasting the results of the first two experiments, students have shown a better performance in solving the problems rather than choosing correct drawings. The results of Experiment 1 and 3 have shown that middle grade children's abilities of making translation between text and line-segment-drawings still have room to be improved.

Keywords : line segment drawings, cognitive development, addition and subtraction word problem.

二、緣由與目的

在國小數學教材中，線段圖常被用來協助說明解題方法或抽象數學概念，透過線段圖的型式，將與數學有關的概念或想法外顯化。本研究所關心的線段圖，是指以往圖解算術中的圖示表徵方式，使用長度量來表徵問題情境中的數量，並透過視覺線索表徵問題情境中各數量間的關係。本研究認為線段圖表示法，是一種精練的溝通工具，是文化的產品，線段圖本身所提供的視覺線索，並不如理想中的那麼明顯易見 (Cobb, Yackel & Wood, 1992)，閱讀者需要發展相關的概念，才能正確解讀。本研究贊同 Gutstein 和 Romberg (1995) 的看法：當看到他人描繪的線段圖時，學童是否能賦予正確意義，這是值得關心的研究問題。雖然圖示表徵對問題解決或數學概念學習到底是有助益或是妨礙？尚有許多的爭論 (吳昭容, 民 79; Gutstein & Romberg, 1995)，但是，數學教育研究者亦常認為：學童是否能自由的將各種表徵互相翻譯或轉換，是判斷數學概念有意義學習的一項重要指標 (朱建正, 吳昭容, 民 82; 吳昭容, 民 79; 蔣治邦, 民 81; Gutstein & Romberg, 1995; Haylock & Cockburn, 1989; Janvier,

1987; Lesh & Landau, 1983)。

在加減運算範圍內，已有大量的研究描述問題情境對學童解題行為的影響 (例如：翁嘉英、鄭昭明, 民 77; 蔣治邦、鍾思嘉, 民 80; 蔣治邦, 民 81; 謝毅興, 民 80; Carpenter, 1985; Carpenter & Moser, 1982; Riley, Greeno & Heller, 1983)，多數的研究都採用相同的問題情境分類系統，按照文字題描述的語意，區分改變 (change)、合併 (combine)、比較 (compare) 及等化 (equalizing) 四類情境，再依數量運作方向 (例如：增加、減少、比多、比少) 及未知數量在問題中的角色，可以進一步地區分各種類型的問題。先前的研究結果，已描述各類問題的相對難度，因此本研究採用此範圍，選擇難度較高的問題情境，來進行測試。

本研究在加減運算範圍內，透過選擇或是非判斷作業，觀察文字題與線段圖間轉譯的表現；在中年級的不同年級時段中，探索文字題情境與線段圖型式對轉譯表現的影響；透過解題作業，探討線段圖在解題過程中的角色。

三、結果與討論

實驗一。透過文字題情境語意 (改變、合併、比較與等化加減問題情境) 與線段圖型式 (單線段圖與雙線段圖) 的操弄，對四所台北市國小三、四年級上、下學期的學童 (共 465 人)，在團體測試的情況下，進行由文字題選擇適當線段圖 (二選一或四選一) 的作業，學童的表現摘要於表一。對四類問題分別進行二因子變異數分析 (線段圖型式 X 年級時段)，皆顯示年級時段效果 (合併： $F_{3,458} = 12.14$, $MSE = 1.52$, $p < .001$; 改變： $F_{3,458} = 11.44$, $MSE = 1.34$, $p < .001$; 等化： $F_{3,458} = 8.85$, $MSE = 1.21$, $p < .001$; 比較： $F_{3,458} = 3.51$, $MSE = 1.40$, $p < .05$)，依據薛費氏事後比較的分析，在合併問題上，三上學童的表現顯著地低於四上與四下，三下低於四下，而四上與四下無差異；在改變問題上，三上學童的表現顯著地低於四上與四下，三下低於四

下，而四上與四下無差異；在等化問題上，三上學童的表現顯著地低於三下、四上與四下，而三下、四上與四下無差異；在比較問題上，僅發現三上學童的表現顯著地低於四上。線段圖型式或與年級時段的交互作用，則皆無可靠的效果，單、雙線段圖並未影響在各類問題上的選擇表現。

[插入表一]

實驗二。採用與實驗一相同的題目，僅改變題目中的數字，以降低計算的複雜，同樣的問題編製成兩份題本，在甲題本的合併問題附加單線段圖，比較問題附加雙線段圖；相對地，在乙題本的改變問題附加單線段圖，等化問題附加雙線段圖，要求學童解決問題，並留下解題紀錄，在與實驗一相同的學校中，另選三、四年級下學期的學童（共 236 人），進行團體測試，來探究附加線段圖對解題的影響，學童的表現摘要於表二。

[插入表二]

對四類問題分別進行二因子變異數分析(題本 X 年級)，皆顯示年級效果(合併： $F_{1,232}=5.33$, $MSE=.46$, $p<.05$ ；改變： $F_{1,232}=6.79$, $MSE=.69$, $p<.01$ ；等化： $F_{1,232}=8.77$, $MSE=.75$, $p<.01$ ；比較： $F_{1,232}=10.70$, $MSE=.90$, $p<.001$)，四下學童的表現優於三下；在合併與等化問題上有顯著的交互作用(合併： $F_{1,232}=7.06$, $MSE=.46$, $p<.01$ ；等化： $F_{1,232}=5.70$, $MSE=.75$, $p<.05$)，顯示在合併問題上，附加線段圖對三下學童的助益大於四下，而在等化問題上，附加線段圖對四下學童的助益大於三下。

實驗三。本實驗的文字題判斷作業，要求學童依據給定的線段圖，判斷同頁附加的各個文字題，是否呈現與線段圖相同的數量關係。作業題本由 8 個線段圖組成，在後 6 個線段圖下，皆附上改變、等化與比較文字題各一題，共有三類問題各 6 題，三類問題中皆有 3 題與線段圖有相同的數量關係，另 3 題則為相異的數量關係；操弄線段圖型式與文字題編製成 4 個題本，A、B 題本的文字題相同，C、D 題本的文字題相同，簡稱甲、乙文字題版本，甲、

乙文字題版本的答案是相反的，例如：在第三個線段圖下，甲版本的改變問題應判斷為錯誤，而乙版本的改變問題應判斷為正確；A、C 題本用單線段圖的型式來表現這 6 個線段圖，而 B、D 題本用雙線段圖的型式來表現這 6 個線段圖。最先的兩個線段圖，皆僅附加兩個文字題，當作控制問題，其線段圖型式與文字題在四個題本中皆相同。

在與實驗一、二相同的學校中，另選三、四年級下學期的學童（共 222 人），進行團體測試，學童的表現摘要於表三。對四類問題採單純交互作用模式進行三因子變異數分析，在控制題分數上，甲、乙版本上的年級單純主要效果皆達顯著的差異(甲： $F_{1,214}=9.40$, $MSE=0.79$, $p<.01$ ；乙： $F_{1,214}=4.63$, $MSE=0.79$, $p<.05$)，皆是四下學童優於三下，由於四個題本的控制題完全相同，沒有其他的顯著效果，顯示四個題本的隨機分派可能沒有太大的問題；在改變問題分數上，乙版本上的年級單純主要效果達顯著的差異($F_{1,214}=5.04$, $MSE=2.03$, $p<.05$)，四下學童優於三下，而在甲版本上有線段圖型式與年級的單純交互作用($F_{1,214}=4.26$, $MSE=2.03$, $p<.05$)，三下學童受線段圖型式的影響較四下明顯，三下學童在雙線段圖型式下，判斷改變問題是否符合給定的線段圖，表現得較差，而四下學童在兩種線段圖型式上的表現則較為相近；在等化問題分數上，僅甲版本上的年級單純主要效果達顯著的差異($F_{1,214}=4.79$, $MSE=2.17$, $p<.05$)，四下學童優於三下；最後，在比較問題分數上，沒有任何顯著的效果。

[插入表三]

討論。實驗一、二採用相同的文字題，而學童解題（在無線段圖的輔助下）的表現優於線段圖的選擇，由於兩個實驗都在相同的學校中實施，上述的差異較難歸因於學童樣本的不同，而且在蔣治邦(民 81)的研究中曾注意到同樣的現象，線段圖並非學童常用的溝通工具，這可能是線段圖選擇作業表現較差的原因，也提醒線段圖與文字題間的關係，並不如理想中的那麼

明顯易見，線段圖的語法（例如：如何表現數量的合成、分解或比較），可能造成學童將文字題轉譯為線段圖時的困難。

實驗一、三是相反方向的轉譯作業，由於作業方式及其中文字題的難度皆不相同，並不適宜作比較，但是，大致而言，四下學童答對約 65% 的線段圖選擇問題，約 69% 的文字題判斷問題，顯示文字題與線段圖間轉譯的能力尚有加強的空間，除了線段圖是不熟悉的溝通工具之外，學童在轉譯過程中，遇到什麼認知障礙？需要進一步的分析與探討。

依據實驗二的結果，在文字題上附加線段圖，有時能增加學童正確解題的機會，整體而言，對四下學童，附加線段圖約增加 5% 的答對率，而在附加線段圖的情境下仍有約 10% 的答錯率；對三下學童，附加線段圖約增加 5% 的答對率，而在附加線段圖的情境下仍有約 17% 的答錯率，附加的線段圖重述了文字題情境中的數量關係，如果線段圖所提供的數量關係線索明顯易見，為何部份學童的解題表現仍反映錯誤的數量關係理解？當對文字題與線段圖的理解，產生不同的數量關係時，學童如何解決衝突？仍須進一步的理解與探討。

實驗三發現三下學童在單線段圖型式下，較能正確地判斷改變問題是否符合給定的線段圖，建議學童在發展讀圖能力時，尚受到線段圖型式與文字題情境契合程度的影響，改變問題是單一數量改變的情境，或許與單線段圖型式較為契合，而與雙線段圖型式較有距離，但此契合程度的假說，在本實驗中尚未獲得太多的證據，可能需要修正文字題的難度，再作進一步的探究。

四、計畫成果自評

將原計畫中所述文字題類型範圍稍作修改後，完成原計畫中的實驗一、二，合併為本報告中的實驗一；將原計畫實驗四中所述選擇作業修改為判斷作業，以增加文字題類型探討的範圍，完成本報告中的實驗三；由於檢視實驗一中上學期資料，學童選圖作業的表現不理想，引發重新探

究學童對文字題理解程度的需要，決定暫緩原計畫的實驗三，改為使用實驗一中的文字題進行解題作業，並探討附加線段圖對解題的影響，完成本報告中的實驗二。目前的報告已完成資料概要的分析與說明，計畫將配合各個實驗中各個問題上表現與錯誤類型的分析，嘗試探討與理解學童可能的認知困難，再正式撰寫探究的心得，尋求學術期刊的發表。

實驗一、三的結果，顯示文字題與線段圖間轉譯的能力，在中年級階段仍在持續發展，轉譯過程中，學童遇到什麼認知障礙？比對實驗一、二的結果，顯示解題能力優於轉譯能力，如果解題作業與轉譯作業的表現，皆反映學童對文字題中所述數量關係理解的程度，為何表現會有差距？這些問題的提出與釐清，將有助於理解中年級學童解題時的推理基礎及其所涉及概念的發展。

由於中年級學童文字題與線段圖間轉譯的能力，尚有加強的空間，建議教師在使用線段圖來協助說明文字題的解題方法時，須先協助學童「看到」線段圖確實地摘要了文字題中的數量關係，否則教師解題方法的說明，將只是在討論另一個問題，學童無法聯想此時的討論與原文字題解法的關係。

五、參考文獻

- 朱建正、吳昭容。(民 82)。「國小學童使用圖示之發展研究」。國科會研究計劃。
- 吳昭容。(民 79)。「圖示對國小學童解數學應用題之影響」。國立台灣大學心理學研究所未發表之獨立研究。
- 翁嘉英、鄭昭明。(民 77)。「國小兒童解數學應用題的認知歷程。見梁雲霞主編：「七十七年國小課程研究學術研討會專輯」。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。
- 蔣治邦。(民 81)。「中、低年級理解題意之發展研究—文字、符號、圖形等表徵系統間之轉換」。國科會研究

- 計劃。
- 蔣治邦、鍾思嘉。(民80)。低年級學童加減概念的發展。「教育心理與研究」, 14期, 35-68。
- 謝毅興。(民80)。「國小兒童解數學應用問題的策略」。國立台灣大學心理學研究所未發表之碩士論文。
- Carpenter, T. P. (1985). Learning to add and subtract: An exercise in problem solving. In E. A. Silver (Ed.). Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (pp.17-40). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skill. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.). Addition and subtraction: A cognitive perspective (pp.9-24). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T.(1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education, 23, 2-33.
- Gutstein, E. & Romberg, T. A. (1995). Teaching children to add and subtract. Journal of Mathematical Behavior, 14, 283-324.
- Haylock, D., & Cockburn, A. (1989). Understanding early years mathematics. London: Paul Chapman.
- Janvier, C. (Ed.). (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., & Landau, M. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (Ed.). Acquisition of mathematics concepts and processes (pp.263-343). New York: Academic.
- Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I, (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.). The development of mathematical thinking (pp.153-196) New York: Academic Press.

表一、學童在線段圖選擇作業^a上表現的平均數與標準差。

組別 題本 問題類別	三上		三下	
	單線段	雙線段	單線段	雙線段
合併	2.04 (1.34)	2.28 (1.23)	2.42 (1.51)	2.38 (1.10)
改變	1.77 (1.25)	1.93 (1.17)	2.45 (1.07)	2.07 (1.07)
等化	1.81 (1.01)	1.79 (1.07)	2.40 (0.97)	2.05 (1.10)
比較	1.86 (1.06)	1.86 (1.05)	2.18 (1.31)	2.05 (1.15)
總人數	57	58	55	55
組別 題本 問題類別	四上		四下	
	單線段	雙線段	單線段	雙線段
合併	2.79 (1.24)	2.92 (1.15)	2.97 (1.29)	3.07 (0.98)
改變	2.34 (1.24)	2.42 (1.05)	2.70 (1.24)	2.75 (1.15)
等化	2.49 (1.13)	2.32 (1.20)	2.43 (1.17)	2.51 (1.10)
比較	2.21 (1.28)	2.44 (1.16)	2.15 (1.23)	2.36 (1.21)
總人數	61	59	60	61

a：各類問題皆有 4 題。

表二、學童在甲、乙題本^a中四類問題上解題表現的平均數與標準差。

組別 題本 問題類別	三年級		四年級	
	甲題本	乙題本	甲題本	乙題本
合併	3.81 (0.48)	3.41 (1.08)	3.78 (0.56)	3.85 (0.40)
改變	3.19 (0.93)	3.31 (0.92)	3.41 (0.81)	3.66 (0.63)
等化	3.17 (0.86)	3.03 (1.06)	3.24 (0.92)	3.64 (0.58)
比較	3.09 (0.82)	2.64 (1.21)	3.27 (0.87)	3.26 (0.85)
總人數	58	58	59	61

a：各類問題皆有 4 題，在甲題本的合併問題附加單線段圖，比較問題附加雙線段圖；相對地，在乙題本的改變問題附加單線段圖，等化問題附加雙線段圖。

表三、學童在文字題判斷作業上表現的平均數及標準差

組別與題本 問題類別	甲文字題版本			
	三年級		四年級	
	單線段	雙線段	單線段	雙線段
控制 ^a	2.92 (1.04)	2.83 (0.83)	3.28 (0.88)	3.53 (0.73)
改變	3.84 (1.43)	2.87 (1.66)	3.79 (1.24)	3.97 (1.43)
等化	3.88 (1.33)	3.00 (1.95)	4.07 (1.28)	4.07 (1.70)
比較	3.52 (1.50)	3.57 (1.12)	3.79 (1.18)	3.67 (1.15)
總人數	25	23	29	30
組別與題本 問題類別	乙文字題版本			
	三年級		四年級	
	單線段	雙線段	單線段	雙線段
控制	3.19 (0.96)	2.96 (0.92)	3.53 (0.80)	3.33 (0.96)
改變	4.15 (1.49)	4.00 (1.60)	4.31 (1.53)	5.03 (1.00)
等化	4.04 (1.37)	3.73 (1.40)	4.13 (1.39)	4.60 (1.33)
比較	3.85 (1.23)	3.38 (1.27)	4.03 (1.40)	3.97 (1.40)
總人數	27	26	32	30

a：各題本中，皆有控制題 4 題，改變、等化與比較問題各 6 題。