確定提撥制下之最佳資產配置及風險控管

黃泓智[1]

摘要

確定提撥制已逐漸成為退休金制度的主流。在確定提撥制下之參與者所能獲得的退休金金額有高度不確定的風險，適當的投資策略在此制度下就顯得格外重要。本文中藉由模擬與最適化的方法，探討適合各種不同風險偏好的投資人之最適提撥率與最適投資策略，以期降低確定提撥制計畫參與者的退休金不足的風險。

隨機模型在保險精算的領域日漸重要，本文藉由隨機投資模型以隨機模擬的方式，推估各種投資標的報酬率以及退休時所需之預期給付目標，並利用演算法之最適化的方法求出投資人的最佳策略。我們主要得到兩項結論：(一) 整體投資的結果與實務上生命週期型態(lifestyle)投資方式呈現類似的現象。(二) 在加入交易成的因素後，我們發現當債券及股票收取交易成本時，原本投資在長債的部份減少，轉而投資在短債。當股票之交易成本變很高時，投資在股票的比重會些微下降，但不會有很大的影響。

關鍵詞：

確定提撥計畫、最適投資策略、交易成本

壹、 前言

[1] 政治大學風險管理與保險學系助理教授.

在世界各國邁向高齡化社會的趨勢下，退休金問題無論在社會層面或經濟層面的重要性日益增加，退休金制度的探討在近年來也成了重要的議題，其中確定提撥計畫已成為了退休金制度的主流。所謂「確定提撥制」(DC)是指，勞雇雙方依其約定，在員工工作期間內依其薪資的某一百分比按期提撥退休準備金於個人的帳戶中，直到員工工作期間為止。其提撥者可為雇主提撥、員工提撥或雇主與員工相對提撥，員工於退休後可獲得的退休金，為個人帳戶在工作期間所累積的提撥額和投資收益之加總額。我國也在 94 年七月一日正式實施新制勞工退休制度。本文的研究對象是針對一般性之確定提撥退休金制度下的投資大眾，非特別針對目前勞退新制下之法規而設計，研究在確定提撥制下，給定一個預期的目標，針對不同風險偏好的投資者，探討最佳的資產配置，使得退休基金期末資產的累積，能在考量風險與報酬的情況下達到此預估目標。

長久以來，資產配置一直被認為是影響投資組合報酬與風險重要的因素，而資產配置主要有三個考量的因素，即投資的報酬率、資產組合的整體風險以及資產與負債之共變異之間的關係，在決定投資比重與選擇投資組合的方法中，首先是由 Markowitz (1952)提出的投資組合理論，利用平均數/變異數最佳化(Mean-Variance Optimization)的方法決定投資比重，也因此，許多相關的文獻探討包括 Wise (1984a, 1984b, 1987a, 1987b)、Wilkie (1985)以及 Sherris (1992)，這一系列之研究，都是以 Markowitz 的投資組合理論為基礎，進而更深入的探討資產配置的問題。

MV 投資組合理論在資產配置的過程中，最受爭議的有二點，首先是 MV 投資組合理論主要是解決單一期間資產配置的問題，無法解決多期資產配置的問題，第二個受爭議的地方是效率前緣之形成受其參數估計影響甚大，當參數估計因假設改變而稍加變動，往往便會得到另一條完全不相同之效率前緣。此外，在單一期間的配置問題上，當過去資料的長期平均已不足以預估未來的狀態，且當投資計畫為長期性的計畫如退休金管理，如果採用過去單點預測將未來十年、二十年都視為同一報酬率是相當不合理的。現今的金融情勢多變，以致於以過去的經驗來反應未來的能力不佳，使得 MV 投資組合理論漸漸不足以應付這日趨複雜的狀況，令實際上的應用價值大打折扣。因此在資產配置的要求上，已逐漸趨向於探討多期決策與面對不確定情況下的決策。

在過去，傳統精算的資產負債管理大多採用確定投資模型(Deterministic Model)，此模型對具長期負債性質之資金運用而言，可能會因為未來的情況與過去經驗相差太大而產生嚴重的落差。退休金通當具有長期負債的性質，因此長期通貨膨漲和各種主要資產的變化對於投資具有相當大的影響。本研究假設未來的短期利率服從 CIR 模型，另外，薪資成長率、通貨膨脹率、長期債券殖利率、股票收益率服從幾何布朗運動，根據台灣市場上近十年來的實際資料配適參數，模擬產生各種未來可能之情境。根據未來市場上總體經濟及投資標的物的模擬值，本文採用每年調整投資組合策略(Regular Rebalancing)的方法累積資產，以期

在員工退休時累積的資產可以達到預期的目標(一定程度的所得替代率)。本文亦藉由各種不同目標函數,探討不同風險偏好的投資者的最適資產配置及最適提撥率。此外,本文亦考慮在含有交易成本的情況下對於最適資產配置與最適提撥率的影響。另外,由於本文在資產配置的產生過程中,採用大量的模擬情況(scenarios),並採用演算法求得所需之最適資產配置,因此可以同時有效的解決單一期間資產配置的問題和解決資產配置之產生敏感性太高的問題。

貳、 最適化目標建構

一般而言,退休金之管理多半著重於最適提撥率、投資報酬率極大化、或是預期目標(預定之所得替代率)達成率之探討(Vigna & Haberman ,2001,2002),上述三者可藉由資產配置達到最適的平衡關係。本文主要是根據各個不同風險偏好的人,探討最適的提撥率及投資決策,以滿足其希望達成的投資報酬率、所得替代率、下方風險損失率等目標。首先我們定義:

TB_n:到期時退休基金目標給付。

S_n:第 n 年之薪資水準。

$\ddot{a}_x$:x 歲的人,每年初領取 1 元一直領到死亡為止之年金現值,其中我們假設每個人最多活到 110 歲。

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{110-x} v^t \cdot {}_t p_x \tag{1}$$

v:折現因子。

${}_t p_x$:x 歲的人活過 t 年的機率。

本文假設 70%的所得替代率為我們退休金資產累積預期達到的目標,因此我們可以得到我們的目標給付公式(TB_n):

$$TB_n = 70\% \times S_n \times \ddot{a}_{x+n} \quad \text{(x+n 代表退休年齡)} \tag{2}$$

本文針對不同風險偏好的投資者提出兩個目標函數。其中,目標函數一適用於較保守的投資者,目標函數二適用於較積極的投資者。

一、 目標函數(1)

在目標函數(1)的主要目的是要求目標給付的期望值是到期總資產累積的不偏估計量(Unbiased Estimator)，亦即於投資期間終了時總資產累積的期望值等於某個倍數(α)的目標給付的期望值；而且我們希望到期時總資產累積與目標給付之間的變異最小，亦即是使到期給付的風險最小。以此目的為目標設定的目標函數表示如下：

$$\text{Minimize} \quad E\left[\left(F_n - \alpha TB_n\right)^2\right] \tag{3}$$

F_n：到期時總資產累積。

二、 目標函數(2)

在目標函數(2)下，我們希望藉由總資產累積的期望值、提撥率、到期給付的風險與不同的參數λ(ex:λ = 0.001, 0.0005, 0.0001)間找到一個平衡，此目的是希望能在最大化到期總累積資產的目標下，儘量能降低所需的提撥率，並能使到期給付的風險也能盡量控制在一定的範圍內，但是卻不一定使得總資產累積的期望值等於目標給付的期望值。λ的大小代表投資者對於風險偏好的程度，λ愈小表示此投資者愈傾向高風險的投資，以此目的為目標設定的目標函數表示如下：

$$\text{Maximize} \quad \frac{E(F_n)}{CR + \lambda \times Var(F_n - TB_n)} \tag{4}$$

CR：提撥率。

參、 模型建立

本文假設我們將手上之現金投資於三項資產，分別為短期債卷、長期債券、及股票，由於本文所探討之預期目標給付與薪資成長率有關，因此在第一小節將針對短期債卷、長期債券、股票及薪資成長率建構隨機預測模型，並根據台灣市場上近十年來的實際資料配適參數。另外在第二、三小節分別在有、無考慮交易成本下，建構資產的累積模型。

一、 投資模型

本研究的利率模型採用 CIR 模型(Cox, Ingersoll, Ross, 1985)，其利率隨機過

程如下:

$dr=k(\theta-r)dt+\sigma_r\sqrt{r}dw_r$

其中 r_0:短期利率

θ:短期利率的長期水準

σ_r:短期利率的波動性

k:均數回歸的調整速度

$k=0.261651$、$\theta=0.0413$、$\sigma_r=0.020973$、$r_0=0.0181$

本研究假設股票、債卷、薪資成長率、通貨膨脹率的隨機過程是服從幾何布朗運動(Geometric Brownian Motion)，其隨機過程可分別表示如下：

股票：

$$\frac{dE}{E}=u_E dt+\sigma_E dw_E$$

$u_E=0.15315$、$\sigma_E=0.34917$

債卷：

$$\frac{dB}{B}=u_b dt+\sigma_b dw_b$$

$u_b=0.039822$、$\sigma_b=0.019103$

薪資成長：

$$\frac{ds}{s}=u_s dt+\sigma_s dw_s$$

$u_s=0.035485$、$\sigma_s=0.028906$

通貨膨脹：

$$\frac{dI}{I}=u_I dt+\sigma_I dw_I$$

$u_I=0.0184$、$\sigma_I=0.0163$

本研究進一步假設利率、股票、債卷三者彼此有相關性。另外，利率、薪資成長率、通貨膨脹率三者有相關。利用 Cholesky 分解法處理其相關性的問題。

二、 未考慮交易成本之資產累積模型

本文所採用的投資策略是固定時間調整投資比例策略(Regular Rebalancing)，也就是在固定時間進行調整投資比例，而調整過後到下一調整時間點前則每年都維持相同的投資比例。在未考慮交易成本下，本文首先定義以下符號以便於建構資產累積模型：

F_0：第一年初退休基金的起始總資產累積值，定義為 0。
F_t：第 t 年底(第 t+1 年初)之退休基金總資產累積值。
F_n：第 n 年底到期退休基金總資產累積值。
X_t:第 t 年初之退休基金所提撥之金額($X_t = CR \times S_t$；CR 為提撥率，S_t 為第 t 年初之薪資)。

$P_{t\,j}$：資產 j 第 t 年初應持有的比例

$r_j(t)$：資產 j 在第 t 年內的總名目報酬率。

其中 j=1 代表短期債券；j=2 代表長期債券；j=3 代表股票。第 t 年底之退休基金資產累積值可以表示如下：

$$F_t = (F_{t-1} + X_t)\left[\sum_{j=1}^{3} P_{t\,j} \times (1 + r_j(t))\right]，t = 1, 2, ..., n. \tag{5}$$

因此，到期退休基金總資產累積值可以表示如下：

$$F_n = CR \cdot \sum_{t=1}^{n} S_t \prod_{i=t}^{n}\left[\sum_{j=1}^{3} P_{i\,j} \times (1 + r_j(i))\right] \tag{6}$$

三、 考慮交易成本之資產模型

在考慮交易成本的情況下，除了原先定義的變數外，本文再定義以下變數：

$A_{t\,\mathrm{j}}$：資產 j 在第 t 年初之價值。

$a_{t\,\mathrm{j}}$：資產 j 在第 t 年末之價值，$a_{0\,\mathrm{j}} = 0$。

tc_j：資產 j 的交易成本。

資產 j 在第 t 年初的價值可以分成兩個部分來看，第一個部分是前期的累積，第二個部分是薪資的提撥。每年初都必須調整投資的比例($P_{t\,j}$)，因為前期的

資產 j 的累積($a_{t-1\ j}$)可能會超過目標的比例或者不足目標的比例，因此在年初時我們必須對超過或者不足的部分做交易，而交易的金額需要扣除交易的成本。同樣的薪資的提撥也必須根據資產 j 在第 t 年的目標比例做投資，而交易的金額也需要扣除交易成本。因此我們可以得到資產 j 在第 t 年初之價值：

$$A_{t\ j}=\left[P_{t\ j}\cdot F_{t-1}+P_{t\ j}\cdot X_t\right]-tc_j\cdot\left[\left|P_{t\ j}\cdot X_t+P_{t\ j}\cdot F_{t-1}-a_{t-1\ j}\right|\right] \tag{7}$$

資產 j 在第 t 年末之價值為其在第 t 年初之價值乘上資產 j 在第 t 年內的報酬率，因此我們可以得到以下關係：

$$a_{t\ j}=A_{t\ j}\times(1+r_j(t)) \tag{8}$$

將各資產在第 t 年末之價值加總之後，可以得到退休基金在第 t 年末之總資產累積值，因此我們可以得到以下的關係：

$$F_t=\sum_{j=1}^{3}\left\{\left[P_{t\ j}\cdot F_{t-1}+P_{t\ j}\cdot X_t\right]-tc_j\cdot\left[\left|P_{t\ j}\cdot X_t+P_{t\ j}\cdot F_{t-1}-a_{t-1\ j}\right|\right]\right\}\times(1+r_j(t)) \tag{9}$$

藉由遞迴的關係，可以得到到期的退休金總資產累積值 F_n。

肆、 數值結果分析

在數值結果的部份，我們採用一個簡單的例子進行試算。我們假設有一個員工現年 25 歲，預計 65 歲退休，因此其投資期間為 40 年。假設其每年初薪資水準為 S_t ($t=1, 2, ..., 40$ ， $S_1=1$)，每年初的提撥率 CR(未知但每年固定)且 $0\%\le \mathrm{CR}\le 100\%$，投資報酬率 $r_j(t)$ (j=1:短斯債券；j=2:長期債券；j=3:股票)服從幾何布朗運動之假設所產生。本文採用的模擬次數為 4000 次。資產累積期間忽略離職率的假設。退休後之年金計算所採用的死亡率以第四回生命表為計算基礎(i=2.5%)。我們採用的投資策略是固定時間調整投資比例策略(Regular Rebalancing)，在本文中之例子，退休基金資產累積的時間為 40 年，兼顧投資報酬率、目標給付達成率、求解所需的時間、以及適當的參數數目等四個因素，本文採用的策略是每五年調整一次投資比例，並於調整後之每年維特固定比例之資產配置。本文之模型假設不允許放空的情形，對於資產的投資比例限制如下：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{4}P_{t\ j}=1\ ,\ t=1,2,...,40\\ 0\le P_{t\ j}\le 1\ \ \forall j=1,2,3,4\end{cases}$$

一、 不同目標函數下之最適資產配置與最適提撥率

(一) 目標函數(1)：

表一是目標函數(1)(α=1)之最適資產配置與最適提撥率。結果顯示投資者幾乎將所有資金都投資在短期債券，這是因為相較於長債及股票，短債的風險低很多，由於目標函數(1)(α=1)是屬於較為保守的目標涵數，在此目標下，總資產若大於目標是不利的，因此會產生過於保守的投資行為。

(二) 目標函數(2)：

退休基金累積達到特定的所得替代率並非投資者唯一的選項，資產極大化及提撥率極小化亦是投資者很重要的選項，目標函數(2)同時包括了這三個考量因素，λ愈小表示此投資者愈傾向高風險的投資，表三到表五代表在目標函數(2)下λ ＝0.001、0.0005、0.0001 的數值結果。當λ ＝0.001 時(表三)，我們發現投資者仍傾向於較保守的投資，只有在前五年以風險性較高的長債及股票為主。

(三) 結果比較

表六是將上述各種情況下的成功機率、提撥率、年平均報酬率、夏普指數、虧損分配的三種主要指標和盈餘分配的三種主要指標，在各種目標函數上做一個比較。所謂的成功機率是指累積的資產在退休時達到預期的所得替代率的機率。虧損分配是指在退休時，4000 次模擬中，累積的資產在退休時沒有達到預期的所得替代率的次數中，其不足的金額之期望值、變異數、以及不足的金額中最大的前 5%的期望值。反之，盈餘分配即是在退休時，4000 次模擬中，累積的資產在退休時有達到預期的所得替代率的次數中，其超過的金額之期望值、變異數、以及超過的金額中最大的前 5%的期望值。一般而言，以投資者的角度而言，期望看到的其投資策略是可達到具有較高的年投資報酬率、較高的夏普指數、較高的成功機率、較低的提撥率、以及盈餘分配大於損失分配的情形。

從成功機率來看，在目標函數(1)中，相同的提撥率(22.69%)，相較於(α=1)，(α=1.5)的情況下由於採取較積極的投資策略，年平均報酬率有顯著的增加，因此成功機率明顯高出許多，另外，盈餘分配中的平均數及 CTE 亦遠高於虧損分配，這代表在 4000 次模擬中，超過預期目標的幅度是遠大於小於預期目標的幅度，這些數字明顯的表示出(α=1.5)的情況下所採取較積極的投資策略，對投資人而言是較為適合的投資策略。在目標函數(2)中，λ=0.001 的情況由於採取相對較為保守的投資策略，雖然成功機率很高，但由於所需的提撥率亦很高，這對

投資人而言，並不見得是很好的決策。λ=0.0005 的投資策略所需的提撥率雖降為 11.78%，但成功機率亦大幅降低，另外，此策路的虧損分配的平均值及 CTE 亦太高，因此這個投資策略對投資人而言，亦不見得是很好的決策。在提撥率固定為 12%且λ=0.0001 的投資策略之下，由於其採取較積極的投資策略，成功機率亦大幅增加，另外，此策路的虧損分配的平均值及 CTE 雖然較高，但其盈餘分配的平均值及 CTE 更高，因此這個投資策略對風險偏好的投資人而言，是個很好的決策。

表 六：各目標函數間之績效評估

目標函數		成功機率 $P(TA_{40} > TP_{40})$	提撥率	年平均報酬率	夏普指數	虧損分配			盈餘分配		
						μ	σ	$CTE_{5\%}$	μ	σ	$CTE_{5\%}$
1	α=1	0.52725	0.2269	0.03963		3.799	3.152	12.31	3.600	2.562	10.007
	α=1.5	0.94225	0.2269	0.06009	1.5205	4.141	3.624	13.88	15.92	9.606	39.624
2	λ=0.001	0.9320	0.2376	0.05158	1.3419	3.158	2.789	10.54	10.20	5.575	23.199
	λ=0.0005	0.1020	0.1178	0.06389	1.6134	12.20	6.733	27.94	4.705	4.268	17.163
	λ=0.0001	0.4622	0.1200	0.07826	1.9733	10.70	7.346	28.89	15.86	15.01	59.972

二、 考慮交易成本下之最適資產配置與最適提撥率

交易成本亦是影響投資決策的因素之一，過去的研究顯示交易成本對於長期持有性投資的持有人是可以忽略的，而當持有人是以獲利為主的短期投資的話，交易成本將會構成顯著的負擔(Pollin & Schaberg & Baker, 2003; James Tobin, 1996; Donohue & Yip, 2003)。本小節將在考慮交易成本的情況下，觀察交易成本對於最適化資產配置與最適化提撥率的影響。

以下我們將以較具代表性的目標函數(1)為主並分各種情況來討論。在此之前，我們先介紹世界各國對於證券交易稅的徵收標準，整理如下(表七)：

表 七：世界各國證券交易稅徵收標準(資料來源：http://www.populareconomics.org/)

國　家	股　票	債　券
澳　洲	0.15　%	0.15　%
法　國	0.10　%	0.60　%(交易額小於 100 萬法郎) 0.30　%(交易額大於 100 萬法郎)
日　本	0.10　%	0.08　%
德　國	0.50　%	0.40　%
英　國	0.50　%	-

美　國	0.0034 %	-

首先我們從實際的情況來設定我們三個資產的交易成本，短期債券的交易成本我們設定為 0。債券及股票的交易成本設為 0.50 %。我們以目標函數(2)中 λ=0.0001 的情形為例子，探討交易成本對投資決策的影響。

將表八的結果與表五作比較，我們發現當債券及股票收取交易成本時，原本投資在長債的部份減少，轉而投資在短債，這是因為長債的投資報酬率只比短債高一些，可是風險確比短債高出許多，因此當長債的交易需要收取費用時，長債的投資比重轉而由短債取代。

表八：目標函數(二) 考慮交易成本下之最適資產配置　$tc_1 = 0$ 、$tc_2 = tc_3 = 0.5\%$

Time t	1	6	11	16	21	26	31	36
現金	0	0.6292	0.7386	0.7124	0.7219	0.7742	0.7605	0.7869
長債	0.2396	0	0	0	0	0	0	0
股票	0.7604	0.3708	0.2614	0.2876	0.2781	0.2258	0.2395	0.2131
Contribution Rate =0.12 = 12%								

伍、　結論與建議

根據本文的研究結果發現，當預期給付目標為達到一定之所得替代率時，如果目標函數有包含累積的資產要達到此預期給付目標的性質時，則越接近到期日時，股票的投資比重將逐漸下降，長期債券持有比例也將會隨著到期日的接近而減少，而短債持有的比例則會隨著到期日的接近而有增加的趨勢，以利於減少到期的給付風險，這樣的結果與 Vigna & Haberman (2001) 文中的結果與實務上生命週期型態(lifestyle)投資方式呈現類似的現象。

另外在加入交易成的因素後，我們發現當債券及股票收取交易成本時，原本投資在長債的部份減少，轉而投資在短債，這是因為長債的投資報酬率只比短債高一些，可是風險確比短債高出許多，因此當長債的交易需要收取費用時，長債的投資比重轉而由短債取代。當股票之交易成本變很高時，投資在股票的比重會些微下降，但不會有很大的影響，這主要是因為股票的獲利性與長債及短債有很大的差異性，當目標函數主要是要求利潤極大化時，即使股票有很高的交易成本，也很難大幅度被長債或短債取代。關於交易成本的研究，因為本文調整時間設定為一年，投資期間只有 40 次的資產投資比例變動，交易成本在本文中並沒有非常大的影響，將交易成本設定過高也與實務上有所出入。因此，未來的研究可考慮採用短期操作，將調整時間設定為每月或每日，調整的期數增加後觀察交易成本的影響。