國 立 政 治 大 學 應 用 數 學 系

碩 士 學 位 論 文

追蹤穩定成長目標線的
投資組合隨機最佳化模型

Stochastic Portfolio Optimization Models for the Stable Growth Benchmark Tracking

碩士班學生：林澤佑 撰

指導教授：劉明郎 博士

中華民國一百零一年七月三日

謝辭

「一切都是短暫的，一切都將過去，而過去的一切也將成為美好。」

–俄國詩人　普希金

首先，感謝我的指導教授　劉明郎老師；兩年來，劉老師總會適時提點我要做什麼以及該做什麼，還有許多寫論文的細節和做學問的方向；最後，感謝老師在最後兩個月不厭其煩的關注進度和校正論文，讓我在最後能順利口試。

在此感謝在我低潮時經常關心我的陳天進老師，綠色瓶子是我們共同的回憶；帶領我進入不可測咖啡世界的蔡炎龍老師，或許是因為咖啡裡包含選擇公理；還有加上張穎泓就能一起共鳴的余屹正老師，雖然很糟糕但是卻也學到很多。

感謝我的好朋友－李威德，和你輪流去台大聽複幾何的日子著實令人懷念，能有這樣的好友一同奮鬥是件美妙的事，尤其是當我們一起趕論文時，一通電話就讓你立馬出門的表情實在有趣。順帶一提，謝辭裡面的 LaTeX，你竟然忘了大寫 X，希望蔡老師沒有發現這件事。最後，感謝你在論文謝辭的最後一句祝福，我會努力交到女朋友的，總有一天。

最後，我要特別感謝 B 咖啡的老闆－詹明哲，我碩士生涯有近三分之一都在他的店裡面度過，阿哲是位不斷相信我是政大高材生、經常鼓勵我的大叔，雖然他的鐵漢柔情總讓人忍不住吐槽一下，但是在那裡，我能感到永遠的安心。希望 B 咖啡和阿哲會一直在那，或許，每個人都需要一個祕密基地吧！

最後的最後，要感謝的人太多，那只好感謝讓我誕生在這世上的雙親吧！

林澤佑　謹誌于

國立政治大學應用數學系

中華民國一百零一年七月

追蹤穩定成長目標線的投資組合隨機最佳化模型

林澤佑

摘要

本論文提出追蹤特定目標線的二階段混合整數非線性隨機規劃模型，以建立追蹤目標線的投資組合。藉由引進情境樹(scenario tree)，我們將此類二階段隨機規劃問題，轉換成為等價的非隨機規劃模型。在金融商品的價格波動及交互作用下，所建立的投資組合在經過一段時間後，其追蹤目標線的能力可能會日趨降低，所以本論文亦提出調整投資組合的規劃模型。為符合實務考量，本論文同時考慮交易成本、股票放空的限制，並且加入期貨進行避險。為了反應投資者的預期心理，也引進了選擇權及情境樹。最後，我們使用台灣股票市場、期貨交易市場及台指選擇權市場的資料進行實證研究，亦探討不同成長率設定之目標線與投資比例對於投資組合的影響。

關鍵字： 目標線追蹤問題、期貨避險、投資組合調整、混合整數非線性規劃、二階段隨機規劃、情境樹

Stochastic Portfolio Optimization Models for the Stable Growth Benchmark Tracking

Lin, Tse-Yu

Abstract

To construct a portfolio tracking specific target line, this thesis studies how to do it via two-stage stochastic mixed-integer nonlinear model. We introduce scenario tree to convert this stochastic model into an deterministic equivalent model. Under the volatility of price and the interaction of each financial derivatives, the performance of the tracking portfolio may get worse when time elapses, this thesis proposes another mathematical model to rebalance the tracking portfolio. These models consider the transactions cost and the limitation of shorting a stock, and the tracking portfolio will include a futures as a hedge position. To reflect the expectation of investors, we introduce scenario tree and also include a options as a hedge position. Finally, an empirical study will be performed by the data from Taiwan stock market, the futures market and the options market to explore the performance of the proposed models. We will analyze how the different benchmarks settings and invest ratio will affect the value of the tracking portfolio.

Keywords：benchmark tracking problem, futures hedging, portfolio rebalance, mixed-integer nonlinear programming, two-stage stochastic programming, scenario tree

目錄

表目錄

圖目錄

第一章　緒論

1.1 研究動機

自 Markowitz (1952)提出以數學規劃模型來處理投資組合選擇理論(portfolio selection problem)以來，投資決策成為了一門新的學科，其衍生出許多不同的規劃模型或理論，而這些往往都是為了達到相同或相似的目的－控制風險並追求高投資報酬率或等價地－給定報酬下追求最小風險。而不論是最佳化理論、隨機控制理論或是啟發式演算法等等，在當代的金融體系裡，總能看見有許多的數學規劃模型被廣泛使用，而隨著金融市場越趨複雜及金融商品間的交互作用，越來越多不同特性的金融商品一一問世，從早期單純的存款、股票到近年來十分熱門的期貨、選擇權及共同基金，投資者該如何從眾多投資工具當中挑選適用於自己的金融商品，並將資金有效的分配在這些金融商品上，是一個十分重要的課題。

為了描述金融市場的不確定性(uncertainty)，Frauendorfer (1995)、Steinbach (1998)延伸了 Markowitz 的投資組合模型，提出了情境樹(scenario tree)為主的隨機規劃模型，以過去的歷史資料生進行未來時間的情境生成(scenario generation)來決定投資組合策略。而藉由將情境樹視為離散的隨機變數，許多機率論及機率規劃的技巧也被隨之引進。自此，描述不確定性的預測類模型也在此時蓬勃發展，也提供了許多投資者一個能符合過去歷史資料的預測方法。

相對於 Markowitz 是以控制風險並追求高投資報酬率為目的而建立投資組合模型，後進學者們如：Andrews、Ford 與 Mallinson (1986)和 Meade 與 Salkin (1989)，是以指數追蹤的技巧來建構投資組合，指數追蹤投資組合的目的在於使投資組合的成長率能與設定的目標成長率一致，常見的追蹤法為完全複製(full replication)、分層法(stratification)、抽樣法(sampling)這三種。近年來，十分熱門的指數型股票基金(Exchange Traded Fund, ETF)便是以完全複製法所建構的投資組合，然而，因其組成指數的股票種類龐大，對於使用完全複製法建構的投資組合，其相對應的管理較為繁瑣，因此，如何透過數學規劃的方式來挑選少量股票以建構投資組合，也是近期的指數追蹤模型裡的課題之一。

在投資組合的建構上，高風險與高報酬往往是一體兩面，而槓桿效應的存在，使得避險(hedge)的概念應運而生，而股價指數期貨及選擇權便是能運用其中的兩項金融商品。透過這兩項金融商品，投資者不僅可以避險，更可以藉此觀察對應的投資標的物，其價格波動及市場走勢，將這些納入建構投資組合中，更能提高投資報酬率，因此，透過選用不同的避險比例，不論是風險愛好者(risk lover)、風險中立者(risk neutral)或風險趨避者(risk aversion)皆能透過這兩類金融商品控管投資者所能承受的風險。

無論是單期(single-period)或是多期(multi-period)的投資組合，在建構一段時間後，投資組合的成效會跟著市場的波動隨之變動，因此，如何調整投資組合也漸漸受到投資人關注。為使投資報酬在長時間內極大化，學者們透過不同的調整原則來進行效率研究，如：定期調整或觀測投資組合表現等等。除了持續滿足風險控管下的高報酬外，為了符合現實狀況，交易成本也經常在調整的過程被考慮進來。

結合過去學者所提出的模型與技術，本論文考慮使用股票建立投資組合提出追蹤特定目標線的數學規劃模型。為了提升投資組合的追蹤能力，使用情境樹將期貨及選擇權的隨機報酬特性納入模型中，加入期貨與選擇權的避險功能建立包含股票、期貨與選擇權的投資組合。納入情境樹的數學規畫模型為二階段隨機整數非線性規劃模型。

1.2 研究目的與架構

本論文是以指數追蹤的技巧來追蹤固定成長率的目標線，尋求一種穩定成長的投資組合。為改善投資組合的追蹤能力，引進情境樹和隨機規劃的概念來提高投資組合的報酬及避險能力，並在經歷一段時間後重新調整，使其能有良好的追蹤效果。我們提出雙階段隨機混合整數規劃(two-stage stochastic mixed-integer programming, SMINP)模型建構與調整投資組合。考慮到股票的放空限制和流動性，為了改善純股票組成的投資組合難以在市場下跌仍保有穩定成長率，因此加入沒有放空限制的期貨以避險，藉此提高成長率；除此之外，引進情境樹的概念並將選擇權納入投資組合中，針對選擇權的部分進行隨機規劃，這將提供投資組合額外的避險與成長能力。最後，我們將以台灣股票市場、期貨市場和台指選擇權市場做為實驗資料來源，並針對我們所提出的數學規劃模型給予實證分析。

此篇論文的主要架構簡述如下：

第一章為緒論。介紹本論文的研究動機，並進一步說明此論文的研究目的及研究架構。

第二章為文獻回顧。針對研究資產配置問題、指數追蹤問題及隨機規劃的相關文獻，作一系列的發展回顧。

第三章為數學模型的探討。此章節共有為三部分：第一部分介紹資產配置問題之相關數學模型的發展歷程；第二部分介紹指數追蹤問題之相關規劃模型的演進過程；第三部分介紹隨機規劃問題之歷史發展及各種模型。

第四章為追蹤目標線的數學規劃模型。此章分為兩部分：第一部分介紹建構追蹤目標線的投資組合數學模型；第二部分介紹調整投資組合的規劃模型。

第五章為實證研究的結果與討論。以台灣股票市場、期貨市場和選擇權市場作為實證的資料來源，應用第四章的混合整數非線性數學規劃模型建構及調整投資組合，並針對重要參數做綜合性分析。

第六章為結論與建議。此章綜合性歸納整理本論文獲得的研究結果，並提出後續相關研究的建議。

第二章　文獻回顧

本章主要針對資產配置(asset allocation)、指數追蹤(index tracking)及隨機規劃(stochastic programming)的相關文獻做一系列整理與回顧，藉以闡述這三類模型之間的關係及涵義。

2.1 資產配置

資產配置問題是根據風險控管下的高投資報酬為原則，挑選並分散投資在各種不同的金融商品上，該如何控管風險及投資報酬門檻的設立，是研究資產配置理論的核心精神。在 1952 年，投資組合的破冰者－Markowitz 建構出平均變異數模型(mean-variance model, MV model)，使用報酬的變異數為風險，其目的是在這樣的設定下最大化報酬或在給定報酬下最小化風險，然而，此模型為一個二次規劃問題，其計算較為複雜造成實務使用上較為不方便。

自 Markowitz 以後，投資組合最佳化的研究日趨進步；而後進學者 Konno 與 Yamazaki (1991)提出了平均絕對偏差模型(mean absolute deviation mode, MAD model)改善平均變異數模型的缺點，該文定義報酬的絕對偏差為投資組合的風險值，新的風險定義將模型改寫成線性規劃模型，大幅降低平均變異數模型在實務上求解的困難。此外，該文所定義的絕對偏差可視為 L_1 函數，而 Markowitz (1959)的變異數可視為 L_2 函數。Konno 與 Yamazaki (1991)並在此論文中證明兩者在目標報酬呈現多元常態分配下為等價的。

Speranza (1993)考慮到不同風險偏好者對於風險承受度的不同，將 Konno 與 Yamazaki 提出的 L_1 風險函數分解為高於平均報酬及低於平均報酬的兩部分，分別定義為上方風險(upside risk)及下方風險(downside risk)，而文中使用以不同的權重組合這兩者所得到的風險函數的模型，則稱為半絕對平均偏差模型(mean semi-absolute deviation model)。同樣地，文中也指出在風險趨避的適當設定下，L_1 函數和半絕對偏差可視為等價。除此之外，Speranza 觀察到不同時間點的歷史資

料，對於投資組合的影響不一，因而將時間權重加入模型之中，以反應不同時間點的資料對於投資組合的影響程度。

在 Konno 與 Yamazaki 的線性規劃模型中，共有 $2T+2$ 條限制式，以線性規劃的觀點，該模型的解至多 $2T+2$ 種股票，其中 T 代表過去資料觀測時間長度；Feinstein 與 Thapa (1993)為降低解空間的大小以提升求解效率，藉由引進兩組偏差變數的方式，改寫了 MAD 模型的目標函數及合併限制式，將原本 $2T+2$ 個限制式降低為 $T+2$ 條，進一步降低非零資產的個數。在投資數量無上限的假設下，這之間的差異除了降低問題規模以增加求解速率外，更藉由限制式的數量來控制投資資產的個數。

Young (1998)定義了風險忍受程度較小的 L_∞ 風險函數，提出以大中取小投資組合選擇方法(minimax portfolio selection rule)。大中取小的原則是在給定報酬下，最小化過去各觀測時間點的最大偏差；換言之，找出一組最穩定的投資組合，使其各時間點的最大偏差是最小的；等價的來說，如果考慮報酬為負的風險，則模型將採用小中取大原則。同樣地，文中亦指出 L_∞ 及 L_2 函數在目標報酬呈現多元常態分配下的等價性。

陳明瑩(民 96)考慮選擇權構成投資組合的交易策略，考慮各類投資決策模型，最後將交易成本納入並改寫楊靜宜(民 93)提出的整數線性規劃模型，並於實證分析研究該投資組合模型的套利空間。

有別與使用過去歷史資料構成投資組合，以處理不確定性問題為主的隨機規劃通常加入對於未來市場不確定情境的預測資料來進行投資組合配置。二階段隨機規劃即是將問題畫分為確定性(deterministic)及隨機性(stochastic)兩階段問題的規劃模型，藉由離散情境的引進可以進一步改寫成非隨機性等價模型；Gülpınar、Rustem 與 Settergren (2003)提出的多階段平均變異數模型就是以在這樣的想法下應運而生。

2.2 指數追蹤

有別於傳統資產配置的建立投資組合方法以控制風險並追求高報酬或給定報酬下的最小風險為原則，指數追蹤是以最小化與目標的追蹤誤差為目的。

指數的概念是以證券市場上以一固定原則選定符合原則的證券，藉由客觀標準(成交量、資本、股本…等)或主觀標準(成長性、市場評估差異…等)的原則設立，將符合這些原則的證券共同組合成一個指數，而在多數市場投資人的保守策略下，指數基金(index fund)應運而生；指數基金是根據某一指數的組成成份來建立相似或相同比例的投資組合。Meade 與 Salkin (1989)將指數基金的建構方式分為：完全複製(full replication)、分層法(stratification)、抽樣法(sampling)這三類；完全複製法雖然可以完美追蹤指數，但隨著指數組成成份的複雜，卻也伴隨著高管理成本，而其於兩法嚴重缺乏追蹤能力，卻也因為不斷修正投資組合構成所帶來高交易成本。

Meade 與 Salkin 藉由最小化投資組合與市場間的成長誤差為目標，將數學規劃模型引進指數追蹤的世界裡。文中也提出以前者使用統計方法來決定各類股票比例的估計係數法(estimated coefficients)及使用公司市值加權資本額來做為股票比例的市值加權法(capitalization-weighted)等兩種方法。文中並加入產業分層限制與否做為探討，在這四類方法上進行實證分析。

由於上述追蹤誤差函數為二次函數，與 Markowitz 的模型相似，計算上較為困難；參考修正自 MA 模型的 MAD 模型，莊智祥(民 87)定義了絕對追蹤誤差做為指數追蹤誤差函數 $\varepsilon_2(\mathbf{P})$ ，並使用 Feinstein 與 Thapa 修正 MAD 模型的方式進行目標規劃，因為該模型考慮了購買數量上的限制，因此是一個混合整數線性規劃(mixed-integer linear programming, MILP)模型。$\varepsilon_2(\mathbf{P})$ 的定義提供了三項重要的性質，其二是該函數的凸性(convexity)保證了全域最佳解，其二是藉由修改 $\varepsilon_2(\mathbf{P})$ 的正負變數可以改善求解速度，其三是 $\varepsilon_2(\mathbf{P})$ 的片段線性性質解決了求解上最根本的複雜度問題。白惠琦(民 91)提出一套啟發式演算法(heuristic algorithm)以處理莊智祥(民 87)建構指數基金的 MILP 模型。在計算該模型時，首先考慮局部放

鬆的 MILP 模型，切平面法(cutting-plane method)及合理不等式(valid inequality)的引進可以加快計算效率，而根據對偶性質計算出各變數加入解集合對於目標函數的貢獻度，再根據貢獻度設計原本模型的近似整數解。實證研究顯示，該演算法提升演算效率且最佳解與近似解誤差很小。

由於投資組合建立一段時間後，就可能無法再滿足建立時所設的各種限制條件，因此，蘇代利(民 93)提出一套建立調整指數基金的混合整數線性規劃模型，在建立指數基金一段時間後，根據最新資料對指數基金的配置作調整，使其恢復良好的追蹤效能。此模型將最小交易單位、最小交易批量、交易成本及固定交易費用比率等台灣股票市場實際交易的限制條件均納入考量，以此建立出調整時有最小交易成本的投資組合。

Yao、Zhang 與 Zhou (2006)則考慮追蹤固定成長率與市場指數等兩種不同追蹤目標。文中捨棄過去以根據歷史資料的走勢來建立投資組合，而是透過幾何布朗運動(geometric Brownian motion, GBM)建立出隨機線性二次控制模型，使用 algebraic Riccati equation 證明了單純求解的不可能，最後將該模型轉換成半正定規劃(semidefinite programming)來求解。該文也提出僅以少量目標指數的組成成分來追蹤指數，藉由隨機挑選了 5 種股票來建立追蹤指數投資組合。該投資組合建立模型允許股票放空及忽略股票交易費用。除了分析兩種追蹤模型的表現好壞外，還對投資組合的調整週期作不同測試比較。

Canakogz 與 Beasley (2008)引進迴歸分析的概念，透過 MILP 模型來建立追蹤指數與超越指數的投資組合。文中利用最小平方法(ordinary least squares)求取各股票報酬率與指數報酬率間的線性迴歸線之截距(intercept)和斜率(slope)，再藉由依據各股票的投資比重進行作線性組合，取得整個投資組合和指數間的迴歸係數。其考量追蹤績效的指標是利用投資組合與市場指數報酬率間的線性迴歸的斜率作參考，若斜率愈靠近 1 表示投資組合變動與市場指數變動愈相似；而超越指數的部分則利用迴歸直線的截距來判斷，若截距愈大則表示愈能夠超越指數。以此目的進行目標規劃並最小化交易成本，用以建立指數追蹤的三階段混合整數線性規劃模型。

Canakogz 與 Beasley 針對香港恆生指數、DAX100、FTSE100、標準普爾 100、Nikkei225、標準普爾 500、Russel2000 與 Russel3000 等八項指數進行一系列實證分析。首先將資料分為內樣本(in-sample)與外樣本(out-of-sample)時間，討論在內樣本時間符合追蹤限制的投資組合是否在外樣本能延續追蹤能力，並比較不同交易限制下，指數追蹤的績效表現好壞和求解時間的長短，而藉由給予不同超額報酬，來驗證投資組合的表現是否能夠超越指數。

承襲 Yao、Zhang 與 Zhou (2006)追蹤穩定成長線的想法，謝承哲(民 99)提出以穩定成長線為其目標的追蹤模型，加入避險的概念，將期貨納入其追蹤成長線的投資組合，考慮到追蹤能力受時間和市場波動而下降，結合了蘇代利(民 93)調整投資組合的想法，以定期調整的方式來維持追蹤能力。

2.3 隨機規劃

隨機規劃是為牽涉到不確定性(uncertainty)的最佳化問題的一種概念，其下有許多的模型如：隨機規劃、機率規劃(probability programming)、隨機最佳化(stochastic optimization)等。

二階段隨機規劃(two-stage stochastic programming)是在眾多隨機規劃模型中最常使用的一類，由必須在現在時間點決定的確定性部分為第一階段(first stage)問題，而在第一階段決定後才能觀察到的隨機部分為第二階段(second stage)問題，結合第一段的決策及面對第二階段的不確定性，合併考慮求取最小期望成本或最大期望效益的模型二階段隨機規劃模型。其發展背景是來自於水壩建立、工廠設立或是流程設計等大規模工業工程問題。

為了描述不確定性，從離散情境(discrete scenario)開始萌芽進而成長到樹的情境樹(scenario tree)，是在處理隨機規劃時最常被使用的技術；在特殊情況下，情境樹的引進可以使得隨機規劃轉變成等價的確定性模型，回到傳統的確定性規劃裡，。而藉由將規劃問題畫分成確定性及隨機性的方式，二階段隨機規劃是在情境樹的引進後最容易被處理的一類模型，使用 Bender’s decomposition (1962)在這類型的二階段隨機規劃問題上，發展出適合各種應用的演算法。

Bender 分解演算法是將二階段隨機規劃改寫成主問題(master problem)及包含情境樹的子問題(sub-problem)，藉由不斷處理子問題所獲得的上下限，回饋到主問題的一類演算法；由於演算過程中，限制式矩陣會隨著主、子問題的不斷增加成為一下三角矩陣，所以在不同領域裡，Bender 分解經常被稱為 L-shaped 法。

90 年代，隨機規劃模型在財務市場上的使用蓬勃發展，各種技巧因應著不同的需求而有所發展。Steinbach (1998)提出了以情境樹為主的隨機規劃模型，將情境樹的結構、生成及各類情境樹下的誤差分析。

Gulpinar、Settergren 與 Rustem (2004)提出多階段隨機二次規劃(Multi-stage stochastic quadratic model, SQ model)模型，考慮交易成本並以 Markowitz 的單階段規劃模型為出發點，將其擴充成為多階段的投資組合建構模型。文中給定了許多隨機規劃在建構與電腦計算上的技巧，能有效降低計算複雜度，其中亦實際探討不同情境數量下的計算效率，計算時間都能有效控制在六分鐘內，除此之外，文中亦討論交易成本的考量對於投資組合表現的好壞。

第三章　數學模型探討

本章將按照文獻回顧提到過去學者的數學模型及演進過程，主要分為資產配置及指數追蹤兩部分來介紹。

第一節以資產配置的數學模型為主：從投資組合選擇問題的先驅－Markowitz (1952)提出的 MV 模型開始；由學者 Konno 與 Yamazaki (1991)提出的 MAD 模型及其相關發展，進展到 Young (1998)提出的大中取小原則為核心的投資組合選擇方法；回顧陳明瑩(民 96)的選擇權交易策略模型，最後以二階段隨機規劃的簡介及 Gülpınar、Rustem 與 Settergren (2003)考慮交易成本的多階段 MV 模型做結。第二節以指數追蹤的數學模型為主：從莊智祥(民 87)以其定義的追蹤誤差函數 $\varepsilon_2(\mathbf{P})$ 所建立的 MILP 模型為起始；白惠琦(民 91) 發展出一套啟發式演算法，透過前者的對偶模型及切平面法來解決求解上的困難；蘇代利(民 93)則建立調整指數基金的最小成本模型，使追蹤誤差能保持良好水準；Yao、Zhang 與 Zhou (2006)藉由隨機控制的概念建立出隨機線性二次控制模型，並利用半正定規劃來求解；Canakogz 與 Beasley (2008)則引進迴歸分析的的概念來建立指數基金，謝承哲(民 99) 考量了避險，將期貨納入其提出的追蹤穩定成長目標線模型及其調整模型。

3.1 資產配置的數學模型

首先介紹的是 Markowitz 的投資組合選擇模型，做為投資決策理論的起始點，Markowitz (1952，1959)提出的平均變異數模型(以下稱 MV 模型)除了成為後繼學者的典範及參考外，影響後世最深的就是報酬函數及風險函數的概念，Markowitz 定義報酬函數為各資產的期望報酬之線性組合，具體表示法如下：

投資組合的報酬函數為：$r(\mathbf{x}) = E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right] = \sum_{j=1}^{n} E[R_j]x_j = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ 為資產決策變數，x_j 代表配置在資產 j 的金額，$E[R_j]$則表示為第 j 資產的期望報酬。Markowitz 定義其風險函數為期望報酬的變異數。

定義 3.1 (Markowitz，1952) L_2 風險函數 $\sigma^2(\mathbf{x})$ 為投資組合報酬之變異數，延續上面的數學符號，其表示式如下：

$$\begin{aligned}\sigma^2(\mathbf{x}) &= E\left[\left\{\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right\}^2\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i>j}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j\end{aligned}$$

模型 A：Markowitz 的 MV 模型

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho C \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = C \tag{3.2}$$

$$0 \leq x_j \leq U_j, \quad j = 1, \cdots, n \tag{3.3}$$

決策變數：

x_j　資產 j 之投資金額

參數及符號：

n　資產投資總數

r_j　資產 j 投資報酬率之期望值，即 $r_j = E[R_j]$

σ_{ij}　資產 i 與資產 j 報酬率之共變異數，即 $\sigma_{ij} = E[(R_i - r_i)(R_j - r_j)]$

ρ　投資者所期望之最小投資報酬率

C　原始投資總金額

U_j　資產 j 的投資金額上限

Markowitz 在其 MV 模型中將風險函數，亦即就是投資組合的變異數，設為目標函數，各限制式分別代表門檻限制、變數限制或財務平衡等；限制式(3.1)

表示投資組合的總報酬必須大過投資者設定的投資報酬；限制式(3.2)表示投資總金額為 C ；限制式(3.3)則表示資產 j 的投資上限。

MV 模型確實成為了當代資產決策理論的基礎模型，但由於其目標函數為非線性二次函數，所以在實際求解上有計算效率上的問題。因此，Konno 與 Yamazaki (1991)提出了 MAD 模型以改善 MV 模型計算較麻煩的不便性；其定義的 L_1 風險函數取代了 Markowitz 的 L_2 風險函數，並於文中指出兩者在常態分配下的等價性，因此最小化 L_1 風險函數等價於最小化 L_2 風險函數。

定義 3.2 (Konno 與 Yamazaki，1991) L_1 風險函數 $K(\mathbf{x})$ 為投資組合報酬率的平均絕對偏差(mean-absolute deviation)，其定義如下：

$$K(\mathbf{x}) = E\left[\,|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j]|\,\right]$$

定理 3.3 (Konno 與 Yamazaki，1991) 當 $(R_1,\cdots,R_n)$ 呈多元常態分配時，則

$$K(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma(\mathbf{x})$$

雖然經過等價的轉換，但 L_1 風險函數仍是非線性函數；藉由引進一組偏差變數，原始模型將可改寫成線性規劃模型。我們透過歷史資料估計隨機變數 R_j ，取得第 t 期的報酬率 r_{jt} ，並令 r_j 為所有時間內的平均報酬率，再以 a_{jt} 來表示第 t 期報酬率 r_{jt} 與平均報酬率 r_j 之間的差。因此 L_1 風險函數可改寫為：

$$K(\mathbf{x}) = E\left[\,|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j]|\,\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|\sum_{j=1}^{n}(r_{jt}-r_j)x_j| = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|\sum_{j=1}^{n} a_{jt}x_j|$$

為了將此風險函數改為線性函數，需再加入一組變數 $y_t \ge 0$ ，使得

$$y_t \ge |\sum_{j=1}^{n} a_{jt}x_j|,\ \ t = 1,\cdots,T$$

接著根據絕對的線性化過程，將上式分解成兩條線性限制式：

$$y_t + \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \geq 0,\ \ y_t - \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \geq 0,\ \ t = 1, \cdots, T$$

在這兩條限制條件下，最小化線性函數 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$ 等同於最小化 L_1 風險函數。

模型 B：Konno 與 Yamazaki 的 MAD 模型

$$\min \quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho C \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = C \tag{3.2}$$

$$0 \leq x_j \leq U_j,\ \ j = 1, \cdots, n \tag{3.3}$$

$$y_t + \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \geq 0,\ \ t = 1, \cdots, T \tag{3.4}$$

$$y_t - \sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j \geq 0,\ \ t = 1, \cdots, T \tag{3.5}$$

$$y_t \geq 0,\ \ t = 1, \cdots, T \tag{3.6}$$

決策變數：

x_j　資產 j 之投資金額

y_t　偏差變數

參數及符號：

T　歷史資料的期數

r_{jt}　資產 j 在時間 t 的報酬率

r_j　資產 j 投資報酬率之期望值，即 $r_j = E[R_j] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{jt}$

a_{jt}　第 t 期報酬率 r_{jt} 與平均報酬率 r_j 之間的差，即 $a_{jt} = r_{jt} - r_j$

與 MV 模型相比，MAD 模型除了是線性規劃模型外，最大的優點是避開了

共變異數矩陣的估計及計算，大大降低計算上的複雜度。除此之外，將 L_1 風險函數根據絕對值的拆解，可以改寫成：

$$
\begin{aligned}
K(\mathbf{x}) &= E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j]\right|\right] \\
&= E\left[-\min\left(0,\ \sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j]\right) + \max\left(0,\ \sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j]\right)\right] \\
&= E\left[\max\left(0,\ E[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j] - \sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right) + \max\left(0,\ \sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j]\right)\right]
\end{aligned}
$$

期望值裡的第一項代表實際報酬低於期望報酬的下方風險(downside risk)，第二項則代表實際報酬高於期望報酬的上方風險(upside risk)；對於兩項具有部同意易風險函數，不同的投資決策人有不同的承受程度，但 Konno 與 Yamazaki 僅將其相加做為一函數來考量，並未具體顯示其差異性，因此 Speranza (1993)給予兩項風險不同的權重，重新定義一個風險函數：

定義 3.4 (Speranza，1993) 風險函數 $N(\mathbf{x})$ 定義如下：

$$
N(\mathbf{x}) = E\left[-\alpha \min\left(0,\ \sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j]\right) + \beta \max\left(0,\ \sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j]\right)\right]
$$

其中， α 與 β 表示上下方風險接受程度的權重。

對於不同類型的投資者，可以藉由調整風險權重 α 和 β，來滿足各自的風險喜好。文中亦證明此風險函數與 L_1 風險函數之間存在的關係：

定理 3.5 (Speranza，1993) $(R_1, \cdots, R_n)$ 在任一機率分配之下，皆滿足

$$
N(\mathbf{x}) = \frac{\alpha + \beta}{2} K(\mathbf{x})
$$

從上述定理，令 $\alpha = \beta = 1$，就能得到 Speranza (1993)的模型等價於 MAD 模型此一重要結論。

Speranza 發現到歷史資料的遠近關係對投資組合有不同程度的影響，因此，

加入時間參數來反應新舊資料的影響。Speranza 定義必然發生的時間因素及投資者對未來投資遠景作預測所產生的兩種不同的時間參數，透過估計資產在下一期的報酬率，並建構出最小化下方風險的投資組合。

當投資者面對的一序列到期日相同但不同履約價格($k_1 < k_2 < \ldots < k_n$)的買權及賣權時，楊靜宜(民 93)在這樣的狀況下，針對選擇權交易策略提出了一個整數線性規劃模型，該文亦提出了由選擇權構成的投資組合在何種狀況下具有套利機會並透過實務研究驗證了模型的可行性。

定理 3.6 (楊靜宜，民 93)　若一投資組合(X,Y)滿足下列條件：

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j^+ - x_j^-) \ge 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}(k_j - p_j)(y_j^+ - y_j^-) - \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j^+ - x_j^-) > 0$$

$$\sum_{j=l+1}^{n}(k_j - k_l - p_j)(y_j^+ - y_j^-) + \sum_{j=1}^{l-1}(k_l - k_j - c_j)(x_j^+ - x_j^-) > 0,\ \ l = 1, \cdots, n$$

則具有套利機會。

但楊靜宜(民 93)藉由上者定理提出的模型並沒有考慮到交易成本，為符合實務交易狀況，陳明瑩(民 96)剖析了選擇權最佳投資策略的規劃模型，使用兩種不同的模型來進行改寫並考慮不同型態的交易成本如下：

模型 D：陳明瑩的大中取小選擇權投資組合模型

min　　v

s.t.
$$\sum_{j=1}^{n}(x_j^+ - x_j^-) \ge 0 \tag{3.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n}(k_j - p_j)(y_j^+ - y_j^-) - \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j^+ - x_j^-) \tag{3.8}$$

$$- \sum_{j=1}^{n}(\alpha p_j + \beta)(y_j^+ + y_j^-) - \sum_{j=1}^{n}(\alpha c_j + \beta)(x_j^+ + x_j^-) \ge 0$$

$$L = \sum_{j=l+1}^{n}(k_j - k_l - p_j)(y_j^+ - y_j^-) + \sum_{j=1}^{l-1}(k_l - k_j - c_j)(x_j^+ - x_j^-) \qquad (3.9)$$

$$-\sum_{j=1}^{n}(\alpha p_j + \beta)(y_j^+ + y_j^-) - \sum_{j=1}^{n}(\alpha c_j + \beta)(x_j^+ + x_j^-) + d_l, \; l = 1, \cdots, n$$

$$d_l \le v, \; d_l \le L, \; l = 1, \cdots, n \qquad (3.10)$$

$$x_j^+ + x_j^- \le M, \; j = 1, \cdots, n \qquad (3.11)$$

$$y_j^+ + y_j^- \le M, \; j = 1, \cdots, n \qquad (3.12)$$

$$x_j^+, x_j^-, y_j^+, y_j^- \ge 0, \; j = 1, \cdots, n \qquad (3.13)$$

決策變數：

x_j^+　第 j 個買權的買入數量

x_j^-　第 j 個買權的放空數量

y_j^+　第 j 個賣權的買入數量

y_j^-　第 j 個賣權的放空數量

d_l　履約價為 k_l 下的選擇權投資組合報酬與虛擬報酬之負偏差

參數及符號：

n　選擇權總數

k_j　第 j 項選擇權的履約價，$k_1 < k_2 < \cdots < k_n$

c_j　履約價為 k_j 的買權價格

p_j　履約價為 k_j 的賣權價格

M　買權與賣權的購買數量上下限

L　投資者所設定的虛擬目標報酬

α　比例制交易成本

β　固定制交易成本

限制式(3.7)與(3.8)是套利機會存在的限制式；限制式(3.9)與(3.10)定義最大負偏差；限制式(3.11)、(3.12)與(3.23)則為選擇權本身的自然限制。文中給定了交易成本函數，並由實證研究當中發現套利機會確實存在。

為了敘述下一個模型，首先介紹二階段隨機線性規劃(two-stage stochastic linear programming, SLP)的基本型。最基本的 SLP 模型敘述如下：

模型 D：SLP 的標準型

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x + E_{\Omega}[Q(x,\omega)] \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

其中 $Q(x,\omega) = \min \ d_{\omega}^T y$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & T_{\omega} x + W_{\omega} y = h \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

在給定的機率空間 (Ω, P) 上，ω 代表的是定義在這個機率空間上的情境(scenario)或可能發生的結果，E_{Ω} 在此代表對於情境 ω 的期望值。此時，x 稱為第一階段變數(first stage variable)，必須在情境 ω 發生前所做的決策變數；y 則稱為第二階段隨機變數(second-stage stochastic variable)，是在 ω 發生後因應不同情境下的決策變數。

根據機率分配的性質，許多機率論的技巧可以被引進規劃模型裡頭進行推演，考慮離散機率分配 P，我們可以給出 E_{ω} 具體的形式如下：

$$E_{\omega}[Q(x,\omega)] = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) Q(x,\omega), \ \ p(\omega) \text{ 代表情境 } \omega \text{ 發生的機率}$$

在滿足給定機率分配是離散的假設及上述表示法下，我們可以目標函數的期望值部分以機率表示法取代，因此，我們可以將 SLP 改寫成等價確定性模型如下：

模型 E：SLP 的等價確定性線性模型

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x + \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) Q(x,\omega) \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & T_{\omega} x + W_{\omega} y_{\omega} = h_{\omega}, \ \ \forall \omega \in \Omega \end{aligned}$$

$x \geq 0$， $y_{\omega} \geq 0$

在給定離散情境ω後，透過改寫 SLP 而得到的等價確定性模型可以在電腦上進行演算法的編寫及計算，Kalvelagen (2003)提供了在數學軟體 GAMS 下使用情境樹計算上述等價確定性線性模型的方式及 Bender (1962)分解演算法的實例。

透過情境樹的設立及推廣，我們可以將二階段隨機規劃擴充成多階段隨機規劃模型。Gülpınar、Rustem 與 Settergren (2003)改寫 Markowitz 的單階段 MV 模型，建構一多階段隨機二次規劃模型(multi-stage stochastic quadratic programming model, MSQP model)。其多階段隨機模型如下：

模型 F：Gülpınar、Rustem 與 Settergren 的 MSQP 模型

$$\min \quad \sum_{t=1}^{T} \alpha_t \sum_{e \in N_t} P_e \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\sigma_{i,j}^{e} + \hat{r}_i \hat{r}_j)(x_{a(e),i} - \bar{x}_{a(e),i})(x_{a(e),j} - \bar{x}_{a(e),j}) \right]$$

$$\text{s.t.} \quad p_j + (1-c_b) b_{0,j} - (1+c_s) s_{0,j} = x_{0,j}, \quad j = 1, \cdots, n \tag{3.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{0j} - \sum_{j=1}^{n} s_{0,j} = 1 - \sum_{j=1}^{n} p_j, \quad j = 1, \cdots, n \tag{3.15}$$

$$\hat{r}_{e,j} x_{a(e),j} + (1-c_b) b_{e,j} - (1+c_s) s_{e,j} = x_{e,j}, e \in N_I, j = 1, \cdots, n \tag{3.16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{e,j} - \sum_{j=1}^{n} s_{e,j} = 0, \quad e \in N_I \tag{3.17}$$

$$\sum_{e \in N_t} P_e \left[\sum_{j=1}^{n} \hat{r}_{e,j} (x_{a(e),j} - \bar{x}_{a(e),j}) \right] \geq W \tag{3.18}$$

$$L_{e,j} \leq x_{e,j} \leq U_{e,j}, \quad e \in N, \quad j = 1, \cdots, n \tag{3.19}$$

$$0 \leq b_{e,j} \leq U_{e,j}^{b}, \quad e \in N_I \cup 0, \quad j = 1, \cdots, n \tag{3.20}$$

$$0 \leq s_{e,j} \leq U_{e,j}^{s}, \quad e \in N_I \cup 0, \quad j = 1, \cdots, n \tag{3.21}$$

決策變數：

x_* 各資產在投資組合的數量

b_* 股票的買進數量

s_* 股票的賣出數量

參數與符號：

T	投資組合的持有長度
ρ_t	在時間點 t 的隨機資訊向量
ρ^t	$\equiv\{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_t\}$ －直到時間點 t 時所有發生的歷史資訊
N	情境樹上的點構成的集合
N_t	在時間點 t 時所有可能情境所構成的集合
N_I	$\equiv N-(N_0\cup N_T)$ －情境樹上的所有內點 i.e.不包含根部和葉子
s	對應情境的指標
e	$\equiv(s,t)$ －在時間點 t 的情境
$a(e)$	事件 e 的父輩
p_e	事件 e 的分支機率： $p_e = prob[e\,\|\,a(e)]$
P_e	事件 e 的機率：若 $e=(s,t)$,則 $P_e=\prod_{j=1}^{t} p_{(s,j)}$
E_ρ	對 ρ 的期望值
p_j	最初持有的投資組合中，資產 j 的比例向量
c_b	購買股票的單位買進成本向量
c_s	購買股票的單位賣出成本向量
$r_t(\rho^t)$	資產所構成的隨機報酬向量
$\sigma_{i,j}^e$	資產 i 與資產 j 在事件 e 時的共變異數
$r_{e,j}$	資產 j 在事件 e 時的隨機報酬： $r_e \sim N(r_t(\rho^t),\sigma_{j,j}^e)$
$\hat{r}_{e,j}$	$\equiv E(r_{e,j}(\rho_t\,\|\,\rho^{t-1}))$ －事件 e 下給定 ρ^{t-1} 之 $r_t(\rho^t)$ 資產 j 的條件報酬
$\bar{x}_*$	市場基準點
$*$	為 w_* 、 $\overline{\mathrm{w}}_*$ 、 b_* 與 s_* 的指標，不是 $t=1,\cdots,T$ 就是 $e\in N$
W	在時間點 $t=T$ ，給定的最小目標報酬

模型是考慮在 $t=0$ 建立投資組合，並在 $t=1,\cdots,T-1$ 這幾個時間點進行自我融資(self-financing)，並在 $t=T$ 時希望持有的投資組合報酬超越基準點加上給定

的超額報酬。

由於上述 MSQP 模型是改寫自 MV 模型，因此目標函數是最小化變異數函數，α_t 是針對各時間點變異數的時間參數；限制式(3.14)是在 $t=0$ 時，投資組合與買賣成分股的平衡式，其中包含買進及賣出的交易成本 c_b 和 c_s；限制式(3.15)是起始投資組合的比例平衡式；限制式(3.16)是投資組合在情境樹之內的價值；限制式(3.17)是在內點做動態平衡的時候，滿足自我融資的限制；限制式(3.18)就如同(3.1)一樣，是要求最終報酬大過給定投資報酬的限制，但由於不確定性及情境樹的合併，因此以期望值的形式要求不小於給定報酬；其餘限制式是決策變數的天然限制或人工限制。

3.2 指數追蹤的數學模型

Meade 與 Salkin (1989)提出兩種在決定建構指數基金時，各股票投資比例權重的決定方式，而其追蹤誤差函數定義如下：

定義 3.7 (Meade 與 Salkin，1989) 追蹤誤差 $\varepsilon_1 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是測量投資組合 $\mathbf{P}$ 與市場指數之間報酬率差距的一種函數。令 R_t^I 和 R_t^V 分別代表市場指數和投資組合在第 t 期的報酬率，則傳統追蹤誤差之定義為：

$$\varepsilon_1(\mathbf{P}) = \sqrt{\sum_{t=1}^{T}(R_t^V - R_t^I)^2}$$

其中，$R_t^I = \dfrac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}}$，$R_t^V = \dfrac{V_t - V_{t-1}}{V_{t-1}}$，$I_t$ 和 V_t 分別代表市場指數和投資組合在第 t 期的價值。

如同 L_2 計算上的困難，$\varepsilon_1(\mathbf{P})$ 也具有同樣的特性而不易計算，因此莊智祥(民 87)使用 Konno 與 Yamazaki 定義 L_1 函數並改寫 MV 模型的方式，重新定義投資組合價格與市場指數價格的絕對偏差為 $\varepsilon_2(\mathbf{P})$ 追蹤誤差函數，並改寫成線性函數以增加求解效率，其定義如下：

定義 3.8 (莊智祥，民 87) 令 $p_{jt} \in \mathbf{R}$，$x_j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$，$p_{jt}$ 和 x_j 分別表示股票 j 在第 t 期的價格及股票 j 的購買數量。則追蹤誤差為：

$$\varepsilon_2(\mathbf{P}) = \sum_{t=1}^{T} |V_t - I_t| = \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{j=1}^{n} p_{jt} x_j - I_t \right|$$

莊智祥(民 87)透過最小化設定追蹤誤差為目標，應用了 Feinstein 與 Thapa (1993)改善 MAD 模型的方式，引進了正、負偏差變數 d_t^+ 及 d_t^- 以改善求解效率。但由於股票 j 的購買數量為非負整數，且以 0-1 變數 y_j 表示該股票的持有與否，因此建立出一個整數規劃的問題。

模型 G：莊智祥的指數追蹤模型

$$\min \quad z=\sum_{t=1}^{T}(d_t^+ + d_t^-)$$

$$\text{s.t.} \quad d_t^+ - d_t^- = \sum_{j=1}^{n} p_{jt}x_j - I_t,\ \ t=1,\cdots,T \tag{3.22}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \le N_0 \tag{3.23}$$

$$x_j \le M_j y_j,\ \ j=1,\cdots,n \tag{3.24}$$

$$x_j \in \mathbf{N}\cup\{0\},\ \ y_j \in \{0,1\},\ \ j=1,\cdots,n \tag{3.25}$$

$$d_t^+, d_t^- \ge 0,\ \ t=1,\cdots,T \tag{3.26}$$

決策變數：

x_j　股票 j 的購買數量

d_t^+　在時間 t 投資組合價值與市場指數價值間的正偏差

d_t^-　在時間 t 投資組合價值與市場指數價值間的負偏差

$$y_j=\begin{cases}1 & \text{當 } x_j>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

參數及符號：

p_{jt}　股票 j 在時間 t 的價格

I_t　市場指數在時間 t 的價值

N_0　投資組合所選取的不同股票數上限

M_j　表一正數，即 $M_j=\dfrac{\max_t\{I_t\}}{\min_t\{p_{jt}\}}\times W_j$，$W_j$ 為股票 j 之資本額權重

此數學模型的目標是最小化投資組合在觀察期間內與市場指數的偏差總和；限制式(3.23)表示總投資股票種類數不超過 N_0；限制式(3.24)表示若投資股票 j 則 $y_j=1$，且可購買數量不超過 M_j；倘若不購買股票 j 則 $y_j=0$。限制式(3.25)表示各股票皆不能放空且投資數量為整數。

由於投資組合建立一段時間後，就可能無法再滿足建立時所設的各種限制條件，但過去的數學模型在建立投資組合後，並不會討論到後續時間點重新調整投資組合的狀況，因此，投資者將面臨調整投資組合的問題。蘇代利(民 93)在建立指數基金一段時間後，根據最新資料對指數基金的配置作調整，提出一套建立調整指數基金的最小交易成本模型。

首先利用模型 G 來建立指數基金，並假設所得的最小追蹤誤差為 Z ，即 $Z = \min z$ ，此時所建立的投資組合為 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ 。而調整後的新投資組合 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 除了要滿足原限制條件(3.22)、(3.23)、(3.24)、(3.25)與(3.26)外，還需達到其追蹤誤差不比原先的追蹤誤差 Z 大太多的條件。再假設 k_j^+ 、 k_j^- 分別為股票 j 每單位買進、賣出的交易成本，考慮指數基金從 $\mathbf{X}$ 調整至 $\mathbf{x}$ 所需的交易成本 $C(\mathbf{x} - \mathbf{X})$：

$$C(\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} k_j^+ (x_j - X_j)^+ + \sum_{j=1}^{n} k_j^- (x_j - X_j)^-$$

其中 $\xi^+ = \max(\xi, 0)$, $\xi^- = \max(-\xi, 0)$ ，由於最大值函數為非線性，因此引進兩組變數 u_j 與 v_j 使得 $u_j - v_j = x_j - X_j$, $u_j \geq 0$, $v_j \geq 0$, $u_j v_j = 0$, $j = 1, \cdots, n$

根據互補限制式(complementarity constraints)的性質，$u_j v_j = 0$, $j = 1, \cdots, n$ 限制式可以消去，得到下列 MILP 模型：

模型 H：蘇代利的指數基金調整模型

min $\quad C(\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} k_j^+ u_j + \sum_{j=1}^{n} k_j^- v_j$

s.t. $\quad \sum_{t=1}^{T} (d_t^+ + d_t^-) \leq Z(1 + \delta) \qquad (3.27)$

$$d_t^+ - d_t^- = \sum_{j=1}^{n} p_{jt} x_j - I_t, \; t = 1, \cdots, T \qquad (3.22)$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \leq N_0 \qquad (3.23)$$

$$x_j \le M_j y_j ,\ \ j=1,\cdots,n \tag{3.24}$$

$$x_j \in \mathbf{N}\cup\{0\} ,\ \ y_j \in \{0,1\} ,\ \ j=1,\cdots,n \tag{3.25}$$

$$d_t^+, d_t^- \ge 0 ,\ \ t=1,\cdots,T \tag{3.26}$$

$$u_j - v_j = x_j - X_j ,\ \ j=1,\cdots,n \tag{3.28}$$

$$u_j, v_j \ge 0 ,\ \ j=1,\cdots,n \tag{3.29}$$

決策變數：

x_j　股票 j 在新投資組合中的投資數量

d_t^+　在時間 t 投資組合價值與市場指數價值間的正偏差

d_t^-　在時間 t 投資組合價值與市場指數價值間的負偏差

u_j　調整時股票 j 的買進數量

v_j　調整時股票 j 的賣出數量

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{當 } x_j > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

參數及符號：

p_{jt}　股票 j 在時間 t 的價格

I_t　市場指數在時間 t 的價值

N_0　投資組合所選取的不同股票數上限

M_j　表一正數，即 $M_j = \dfrac{\max_t\{I_t\}}{\min_t\{p_{jt}\}} \times W_j$ ，W_j 為股票 j 之資本額權重

k_j^+　買進每單位股票 j 的交易成本

k_j^-　賣出每單位股票 j 的交易成本

X_j　股票 j 在原投資組合中的投資數量

Z　原指數基金投資組合所具有的最小追蹤誤差值

δ　投資者所能容忍的誤差程度，即 $\delta = \dfrac{z-Z}{Z}$

此數學模型的目標在於使調整投資組合時的交易成本最小。限制式(3.27)表示將新投資組合的追蹤誤差限制在最佳誤差的可容忍變動範圍內。限制式(3.28)

表示投資組合各資產買進賣出的調整，若 $x_j > X_j$，則再買進股票 j，這時 $u_j > 0$、$v_j = 0$，反之亦然。

謝承哲(民 99)參考了 Yao、Zhang 與 Zhou (2006)追蹤穩定成長目標線的想法，提出了以追蹤穩定成長線為目標的追蹤模型，該模型裡結合了避險的概念，加入了期貨做為投資組合的成分資產，謝承哲的追蹤穩定成長目標線模型如下：

模型 I：建立追蹤目標線投資組合的模型

$$\min \quad z = \sum_{t=1}^{T} (z_t^+ + z_t^-)$$

$$\text{s.t.} \quad z_t^+ - z_t^- = \sum_{j=1}^{n} V_{jt} x_j + M(w^+ + w^-) \tag{3.30}$$

$$+ (F_t - F_1)(w^+ - w^-) - G_t, \ t = 1, \cdots, T$$

$$\sum_{j=1}^{n} (1 + f_j^b) V_{jT} x_j + (M + F_T h + K)(w^+ + w^-) = C \tag{3.31}$$

$$0 \le V_{jT} x_j \le \delta_j C, \ j = 1, \cdots, n \tag{3.32}$$

$$0 \le M(w^+ + w^-) \le \varepsilon C \tag{3.33}$$

$$w^+ w^- = 0 \tag{3.34}$$

$$z_t^+, z_t^- \ge 0, \ t = 1, \cdots, T \tag{3.35}$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1, \cdots, n \tag{3.36}$$

$$w^+, w^- \in \mathbf{N} \cup \{0\} \tag{3.37}$$

決策變數：

x_j 股票 j 之投資數量

z_t^+ 投資組合價值和目標線之間的正偏差

z_t^- 投資組合價值和目標線之間的負偏差

w^+ 期貨的多頭部位數量

w^- 期貨的空頭部位數量

參數及符號：

T　歷史資料的期數

n　投資股票總數

V_{jt}　在時間 t 每單位股票 j 的價格

F_t　在時間 t 每口期貨的價格

δ_j　股票 j 占投資組合比重之上限

ε　期貨保證金占投資組合比重之上限

C　建立時的總資產

f_j^b　在時間 T 買入股票 j 的每單位交易成本

M　期貨交易每口需要提存的保證金

h　在時間 T 買賣期貨的每單位交易成本

K　期貨交易每口的手續費

G_t　依據投資組合期望價值成長率所設定的目標線

限制(3.30)與(3.35)代表的是追蹤誤差的定義及非負限制；限制式(3.31)是建立資產時的金額平衡，其中包含了股票與期貨的購買手續費及期貨的保證金；限制式(3.32)與(3.33)是各股票及期貨保證金的投資金額比重限制；限制式(3.34)則是期貨的買賣限制，為符合實際狀況及有效運用資產加入的非線性限制；限制式(3.36)及(3.37)代表的是股票不能放空的限制及期貨部位的整數限制。

受到市場波動因素，由於指數追蹤投資組合的穩定追蹤能力會隨時間而降低，因此，謝承哲(民 99)文中針對這個現象提出了調整模型如下：

模型 J：調整追蹤目標線投資組合的模型

$$\min \quad z=\sum_{t=1}^{T}(z_t^+ + z_t^-)$$

$$\text{s.t.} \quad z_t^+ - z_t^- = \sum_{j=1}^{n} V_{jt}x_j + M(w^+ + w^-) + (F_t - F_1)(w^+ - w^-) - G_t,\ t=1,\cdots,T \tag{3.30}$$

$$\sum_{j=1}^{n} V_{jT} x_j + M(w^+ + w^-) = C - \sum_{j=1}^{n} V_{iT}(f_j^b d_j^+ + f_j^s d_j^-) \tag{3.38}$$

$$-(F_T h + K)(w^+ + w^- + W)$$

$$0 \le V_{jT} x_j \le \delta_j C, \quad j = 1, \cdots, n \tag{3.32}$$

$$0 \le M(w^+ + w^-) \le \varepsilon C \tag{3.33}$$

$$w^+ w^- = 0 \tag{3.34}$$

$$d_j^+ - d_j^- = x_j - X_j, \quad j = 1, \cdots, n \tag{3.39}$$

$$d_j^+ d_j^- = 0, \quad j = 1, \cdots, n \tag{3.40}$$

$$z_t^+, z_t^- \ge 0, \quad t = 1, \cdots, T \tag{3.35}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \cdots, n \tag{3.36}$$

$$w^\pm \in \mathbf{N} \bigcup \{0\} \tag{3.37}$$

$$d_j^+, d_j^- \ge 0, \quad j = 1, \cdots, n \tag{3.41}$$

決策變數：

x_j 　股票 j 之投資數量

z_t^+ 　投資組合價值和目標線之間的正偏差

z_t^- 　投資組合價值和目標線之間的負偏差

w^+ 　期貨的多頭部位數量

w^- 　期貨的空頭部位數量

d_j^+ 　股票 i 調整時的賣出數量

d_j^- 　股票 i 調整時的賣出數量

參數及符號：

f_j^b 　在時間 T 買入股票 j 的每單位交易成本

f_j^s 　在時間 T 賣出股票 j 的每單位交易成本

X_j 　股票 j 調整前的原投資數量

W 　期貨調整前的原投資數量

限制式(3.38)表示調整時的投資金額平衡式，包含買進賣出的交易成本；限制式(3.39)、(3.40)與(3.41)定義了調整投資組時候的買賣變數及自然限制。

謝承哲自台灣股價指數的成分股篩選了 105 種股票，並以台股期貨指數市場做為實證研究的數據來源；文中對於投資組合在不同時間點的追蹤能力、在特定時間點的調整模型績效與不同報酬及期貨比重對於投資組合表現的影響，均做了詳盡的分析與討論。

第四章　建立追蹤目標線投資組合的數學模型與實證研究

指數追蹤最主要的目的在於建立出一組投資組合，其成長率與追蹤目標指數有一樣的走勢，但這也意味著投資組合與追蹤目標具有相同的成長和衰退。

為使投資組合在各種狀況下都能有相當好的成長率，Yao、Zhang 與 Zhou (2006)提出以幾何布朗運動模擬未來股價的方式來進行目標追蹤，但是該模型卻忽略交易成本和允許股票進行放空，使得該模型較不符合實際市場交易限制。

謝承哲(民 99)為改善上述缺失，使用股票的歷史資料建構追蹤特定目標線的投資組合，考量了避險的概念，在投資組合中加入期貨以規避其價值隨市場衰退而下降的風險；投資組合經過一段時間後，會逐漸偏離所追蹤的目標線，該論文也提出調整投資組合的模型，透過新資料的加入，使用數學規劃進行投資組合的調整，使提供投資組合能持續追蹤目標。

綜合上述概念，本論文以股票做為追蹤特定目標線的投資組合主要成分，此外，為使投資者建立投資組合時能將未來的預測列入考慮，透過引進情境樹的方式，將沒有放空限制的期貨及選擇權加入投資組合中進行避險，結合上述步驟提出二階段隨機規劃模型，建立出符合追蹤、避險及反應投資者對於未來期望的投資組合。

4.1 建立投資組合的數學模型

追蹤目標線的目的在於尋找一投資組合，其漲跌與否皆與目標線的情況一致。本文以股票做為投資組合的主要成分，該部份投資組合在各時間點的價值表示如下：

$$\sum_{i=1}^{n} V_{it} x_i,\ \ t = 1, \cdots, T$$

$$x_i \geq 0,\ \ i = 1, \cdots, n$$

其中，非負的決策變數 x_i 表示投資在股票 i 之數量，且不允許放空，V_{it} 則代表股

票在時間t的單位價格。若將交易成本及投資金額上限納入考量，則可得到：

$$\sum_{i=1}^{n}(1+F_i^b)V_{iT}x_i = C$$

其中C表示為建立投資組合時的總資產，F_i^b表示在時間T買入股票i的每單位交易成本。

「不要將雞蛋放在同一個籃子」在投資理財最重要的觀念之一，透過投資金額上下限的設定來分散風險。因此加入下式對單一資產的投資金額上限做限制，來達到分散風險的效果。

$$0 \le V_{iT}x_i \le \delta_i C,\ \ i = 1,\cdots,n$$

其中，δ_i表示股票i占投資組合比重之上限。

追蹤目標線的規劃模型，其目的在於尋找一組投資組合使其每一時間點的價值與目標線G_t相同，換言之，希望：

$$\sum_{i=1}^{n}V_{it}x_i = G_t,\ \ t = 1,\cdots,T$$

透過目標規劃的技巧，藉由引進正負偏差h_t^+與h_t^-將上述限制式進行目標規劃的改寫，綜合上述討論，可以得到以股票構成的第一階段追蹤目標線的投資組合建構模型，其規劃模型如下：

$$\min \quad z = \sum_{t=1}^{T}(h_t^+ + h_t^-)$$

$$\text{s.t.} \quad h_t^+ - h_t^- = \sum_{i=1}^{n}V_{it}x_i - G_t,\ \ t = 1,\cdots,T$$

$$\sum_{i=1}^{n}(1+F_i^b)V_{it}x_i = C$$

$$0 \le V_{iT}x_i \le \delta_i C,\ \ i = 1,\cdots,n$$

$$x_i \ge 0,\ \ i = 1,\cdots,n$$

$$h_t^+, h_t^- \ge 0,\ \ t = 1,\cdots,T$$

純粹由股票構成的第一階段投資組合，因為放空的限制，在市場下跌時難以使投資組合的價值穩定成長。為因應此一狀況，考量避險的概念，應將對應整體市場的指數期貨及指數選擇權納入考量，由於這兩類商品沒有放空限制，可以讓投資組合在指數市場下跌時規避投資組合價值下跌的風險。雖然期貨和選擇權的避險功能可以降低風險，但買進這類商品所支付的權利金與損益，也會在市場上揚時抵銷掉部份報酬，使得投資報酬率降低，因此，投資組合需求是完全避險或是部份避險，將依據投資者對於風險的忍受程度來設定避險比例。

透過參數η的引進，我們將投資金額分成ηC與$(1-\eta)C$兩部份，前者做為第一階段投資組合的投資總金額，後者則是做為以期貨及選擇權構成的第二階段投資組合的投資總金額，並希望第二階段投資組合能提供避險能力並最大化到期時的資產成長。

期貨部份，由於期貨的價值分成期貨總值及保證金，則在期貨總值和資產平衡上有著不同於股票的表示法，如下式所示：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & M(w^+ + w^-) + (F_{T+L} - F_T)(w^+ - w^-) \\
\text{s.t.} \quad & M(w^+ + w^-) + (F_T h + K)(w^+ + w^-) = (1-\eta)C \\
& 0 \le M(w^+ + w^-) \le \varepsilon C \\
& w^+ w^- = 0 \\
& w^+, w^- \in \mathbf{N} \cup \{0\}
\end{aligned}
$$

其中，M為期貨交易每口所需提存入保證金帳戶的保證金，h表示買賣期貨的單位交易成本，K為每口期貨交易的手續費，w^+表示為期貨的多頭部位，w^-表示為空頭部位，F_t表示每口期貨在時間t的價格，ε表示期貨保證金占投資組合比重之上限，藉此控制投資者期望的避險比例，$T+L$表示在T時購買的期貨在$T+L$到期；因為F_{T+L}是一未知數，因此透過情境的引進將其改寫成：

$$Q(\omega) = M(w^+ + w^-) + F_\omega(w^+ - w^-) = G_{T+L}, \ \forall \omega \in \Omega$$

其中(1) Ω表示所有可能出現結果的集合；(2) ω表示所有可能出現的結果(outcome)；(3) F_ω則表示結果ω發生時的期貨價格，為一隨機變數。

選擇權的部份，其到期損益和考慮交易成本的購買價值亦與上述兩類商品不同，其表示如下所示：

$$\sum_{j=1}^{m}(I_{T+L}-K_j)^{+}(y_j^{+}-y_j^{-})+\sum_{k=1}^{p}(K_k-I_{T+L})^{+}(z_k^{+}-z_k^{-})=G_{T+L}$$

$$\sum_{j=1}^{m}c_j(y_j^{+}-y_j^{-})+(\alpha c_j+\beta)(y_j^{+}+y_j^{-})+\sum_{k=1}^{p}p_k(z_k^{+}-z_k^{-})+(\alpha p_k+\beta)(z_k^{+}+z_k^{-})=(1-\eta)C$$

$$0\le c_j(y_j^{+}+y_j^{-})\le \lambda_j C,\ \ j=1,\cdots,m$$

$$0\le p_k(z_k^{+}+z_k^{-})\le \rho_k C,\ \ k=1,\cdots,p$$

$$y_j^{+},y_j^{-}\ge 0,\ \ j=1,\cdots,m$$

$$z_k^{+},z_k^{-}\ge 0,\ \ k=1,\cdots,p$$

其中，y_j^{+}與y_j^{-}表示為買權的多頭和空頭部位，z_k^{+}與z_k^{-}表示為賣權的多頭和空頭部位，λ_j與ρ_k表示買權及賣權占投資組合比重之上限，藉此控制投資者期望的避險比例，$T+L$表示在T時購買的期貨在$T+L$到期；與期貨的到期情況一樣，由於到期日指數I_{T+L}為一未知數，因此透過情境的引進將其改寫成：

$$\sum_{j=1}^{m}(I_{\omega}-K_j)^{+}(y_j^{+}-y_j^{-})+\sum_{k=1}^{p}(K_k-I_{\omega})^{+}(z_k^{+}-z_k^{-})=G_{T+L},\ \ \forall\omega$$

綜合上述討論，第二階段投資組合的建構模型，具體如下：

$$\begin{aligned}
\min\quad & Q(\omega)=g_{\omega}^{+}+g_{\omega}^{-}\\
\text{s.t.}\quad & g_{\omega}^{+}-g_{\omega}^{-}=M(w^{+}+w^{-})+(F_{\omega}-F_T)(w^{+}-w^{-})\\
& \qquad +\sum_{j=1}^{m}(I_{\omega}-K_j)^{+}(y_j^{+}-y_j^{-})+\sum_{k=1}^{p}(K_k-I_{\omega})^{+}(z_k^{+}-z_k^{-})-G_{T+L}\\
& \sum_{j=1}^{m}c_j(y_j^{+}-y_j^{-})+(\alpha c_j+\beta)(y_j^{+}+y_j^{-})\\
& \qquad +\sum_{k=1}^{p}p_k(z_k^{+}-z_k^{-})+(\alpha p_k+\beta)(z_k^{+}+z_k^{-})=(1-\eta)C\\
& 0\le M(w^{+}+w^{-})\le \varepsilon C\\
& w^{+}w^{-}=0
\end{aligned}$$

$$0 \le c_j(y_j^+ + y_j^-) \le \lambda_j C,\quad j = 1, \cdots, m$$

$$0 \le p_k(z_k^+ + z_k^-) \le \rho_k C,\quad k = 1, \cdots, p$$

$$w^+, w^- \in \mathbf{N} \bigcup \{0\}$$

$$y_j^+, y_j^- \ge 0,\quad j = 1, \cdots, m$$

$$z_k^+, z_k^- \ge 0,\quad k = 1, \cdots, p$$

$$g_\omega^+, g_\omega^- \ge 0$$

透過二階段隨機規劃的概念，本章建立追蹤目標線投資組合的二階段混合整數非線性規畫模型如下：

模型一：建立追蹤目標線投資組合的模型

$$\min \qquad z = \sum_{t=1}^{T} (h_t^+ + h_t^-) + E_\Omega[Q(\omega)] \tag{4.1}$$

$$\text{s.t.} \qquad h_t^+ - h_t^- = \sum_{i=1}^{n} V_{it} x_i - G_t,\quad t = 1, \cdots, T \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (1 + F_i^b) V_{iT} x_i = \eta C \tag{4.3}$$

$$0 \le V_{iT} x_i \le \delta_i C,\quad i = 1, \cdots, n \tag{4.4}$$

$$h_t^+, h_t^- \ge 0,\quad t = 1, \cdots, T \tag{4.5}$$

$$x_i \ge 0,\quad i = 1, \cdots, n \tag{4.6}$$

其中 $Q(\omega) = \min\,(g_\omega^+ + g_\omega^-)$ (4.7)

$$\text{s.t.} \qquad g_\omega^+ - g_\omega^- = \sum_{j=1}^{m} (I_\omega - K_j)^+ (y_j^+ - y_j^-) + \sum_{k=1}^{p} (K_k - I_\omega)^+ (z_k^+ - z_k^-)$$

$$+ M(w^+ + w^-) + (F_\omega - F_{T)}(w^+ - w^-) - G_{T+L} \tag{4.8}$$

$$M(w^+ + w^-) + (F_T h + K)(w^+ + w^-)$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} c_j (y_j^+ - y_j^-) + (\alpha c_j + \beta)(y_j^+ + y_j^-)$$

$$+\sum_{k=1}^{p} p_k(z_k^+ - z_k^-) + (\alpha p_k + \beta)(z_k^+ + z_k^-) = (1-\eta)C \tag{4.9}$$

$$0 \le M(w^+ + w^-) \le \varepsilon C \tag{4.10}$$

$$w^+ w^- = 0 \tag{4.11}$$

$$0 \le c_j(y_j^+ + y_j^-) \le \lambda_j C,\quad j = 1,\cdots,m \tag{4.12}$$

$$0 \le p_k(z_k^+ + z_k^-) \le \rho_k C,\quad k = 1,\cdots,p \tag{4.13}$$

$$w^+, w^- \in \mathbf{N} \cup \{0\} \tag{4.14}$$

$$y_j^+, y_j^- \ge 0,\quad j = 1,\cdots,m \tag{4.15}$$

$$z_k^+, z_k^- \ge 0,\quad k = 1,\cdots,p \tag{4.16}$$

$$g_\omega^+, g_\omega^- \ge 0 \tag{4.17}$$

決策變數：

x_i 股票 i 之投資數量

w^+ 期貨的多頭部位數量

w^- 期貨的空頭部位數量

y_j^+ 第 j 個買權多頭部位之投資數量

y_j^- 第 j 個買權空頭部位之投資數量

z_k^+ 第 k 個賣權多頭部位之投資數量

z_k^- 第 k 個賣權空頭部位之投資數量

h_t^+ 投資組合中，股票的價值和目標線之間的正偏差

h_t^- 投資組合中，股票的價值和目標線之間的負偏差

g_ω^+ 投資組合中，到期日時，期貨與選擇權價值和目標線之間的正偏差

g_ω^- 投資組合中，到期日時，期貨與選擇權價值和目標線之間的負偏差

參數與符號：

T 歷史資料的期數

n 投資股票總數

L 在時間點 T 時所投資的期貨及選擇權剩餘履約日

V_{it}　在時間 t 每單位股票 i 的價格

F_t　在時間 t 每口期貨的價格

δ_i　股票 i 占投資組合比重之上限

ε　期貨保證金占投資組合比重之上限

λ_j　買權部位占投資組合比重之上限

ρ_k　賣權部位占投資組合比重之上限

η　股票在投資組合的比例

C　建立時的總資產

F_i^b　在時間 T 買入股票 i 的每單位交易成本

α　買賣選擇權的單位交易手續費

β　買賣選擇權的每口固定手續費

M　期貨交易每口需要提存的保證金

h　在時間 T 買賣期貨的每單位交易手續費

K　期貨交易每口的手續費

G_t　依據投資組合期望價值成長率所設定的目標線

在第一階段模型裡，以股票部位作為追蹤指數的主要成分，限制式(4.2)定義了股票價值與追蹤目標的正負偏差，並在目標函數(4.1)中最小化所有觀測時間點的追蹤誤差及第二階段目標的期望值；限制式(4.3)中引進一個參數 η ，做為將資產分割成兩部份的比例參數，並將交易手續費納入考量，定義了購買股票的資產平衡式；限制式(4.4)定義了個別資產的上限，藉由個別資產的投資上限將風險盡可能的分散，以避免將資金投入少數股票甚至單一股票的極端情況。

在第二階段的模型中，最主要在於建立由不同履約價的選擇權及期貨的第二階段投資組合進行追蹤，藉由限制式(4.8)定義出各種情境下的追蹤誤差，其目標函數同樣在於最小化追蹤誤差；限制式(4.9)則反應了建立第二階段投資組合的資產平衡，將總資產的 $(1-\eta)$ 用於投資組合，其中也考量了期貨的保證金、每口期貨手續費、固定手續費和選擇權的各種手續費；限制式(4.10)-(4.17)則是期貨及買賣權的投資上限及自然限制。

由於在股票在交易市場上有著放空限制，但期貨與選擇權並無此類限制，但藉由正負部變數的引進，可以將這兩類變數定義成兩非負變數相減，藉此將模型中許多絕對值限制改寫成線性限制式，以利提升求解效率，此外，由於期貨的單位價值過大，因此考慮期貨部位為整數限制。綜合以上討論，本章節所提出的模型為二階段混合整數隨機規劃模型。由於二階段隨機規劃模型可以透過離散情境的引進，將其改寫為非隨機性等價模型，考慮離散情境$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots\}$，$P_\omega$為對應的機率值，則模型一的確定性模型如下：

模型二：模型一的非隨機性等價模型

$$\min \quad z=\sum_{t=1}^{T}(h_t^{+}+h_t^{-})+\sum_{\omega\in\Omega}P_{\omega}(g_{\omega}^{+}+g_{\omega}^{-}) \tag{4.1}$$

$$\text{s.t.} \quad h_t^{+}-h_t^{-}=\sum_{i=1}^{n}V_{it}x_i-G_t,\ \ t=1,\cdots,T \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} g_{\omega}^{+}-g_{\omega}^{-}=M(w^{+}+w^{-})+(F_{\omega}-F_{T})(w^{+}-w^{-})+\sum_{j=1}^{m}(I_{\omega}-K_j)^{+}(y_j^{+}-y_j^{-})\\ +\sum_{k=1}^{p}(K_k-I_{\omega})^{+}(z_k^{+}-z_k^{-})-G_{T+L}\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(1+F_i^{b})V_{iT}x_i=\eta C \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} M(w^{+}+w^{-})+(F_T h+K)(w^{+}+w^{-})\\ +\sum_{j=1}^{m}c_j(y_j^{+}-y_j^{-})+(\alpha c_j+\beta)(y_j^{+}+y_j^{-})\\ +\sum_{k=1}^{p}p_k(z_k^{+}-z_k^{-})+(\alpha p_k+\beta)(z_k^{+}+z_k^{-})=(1-\eta)C\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$0\le V_{iT}x_i\le\delta_i C,\ \ i=1,\cdots,n \tag{4.4}$$

$$0\le M(w^{+}+w^{-})\le\varepsilon C \tag{4.10}$$

$$w^{+}w^{-}=0 \tag{4.11}$$

$$0\le c_j(y_j^{+}+y_j^{-})\le\lambda_j C,\ \ j=1,\cdots,m \tag{4.12}$$

$$0\le p_k(z_k^{+}+z_k^{-})\le\rho_k C,\ \ k=1,\cdots,p \tag{4.13}$$

$$h_t^+, h_t^- \geq 0,\ t = 1, \cdots, T \tag{4.5}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, n \tag{4.6}$$

$$w^+, w^- \in \mathbf{N} \cup \{0\} \tag{4.14}$$

$$y_j^+, y_j^- \geq 0,\ j = 1, \cdots, m \tag{4.15}$$

$$z_k^+, z_k^- \geq 0,\ k = 1, \cdots, p \tag{4.16}$$

$$g_\omega^+, g_\omega^- \geq 0 \tag{4.17}$$

4.2 調整投資組合的數學模型

在使用模型建立投資組合一段時間後，其追蹤能力可能隨著時間流逝而不再符合建構者的期待，且第二階段投資組合的避險效果可能也會大幅下降，此時，就須要對投資組合進行調整，希望能再次找出追蹤效果最佳的投資組合。

在調整過程中，最小化的依舊是投資組合與追蹤成長線的追蹤誤差，且投資組合必須仍然符合最初建構時的限制，如：分散風險、避險等等限制及要求，因此，調整投資組合的模型與建構投資組合的模型之間，決定性的差異便是調整資產時所額外產生的交易成本。以下分別對於股票、期貨及選擇權三個部分進行交易成本的討論和列式：

假設投資組合調整前的股票資產為 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$，而以 F_i^b 、F_i^s 分別表示在時間 T 買進及賣出股票 i 的單位交易成本，當投資組合從 $\mathbf{X}$ 調整至 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 時需要考慮買與賣兩種狀況，且須限制同一資產僅能買或僅能賣，在此定義 d_i^+ 與 d_i^- 分別表示股票 i 調整時的買進與賣出數量並滿足下列限制：

$$d_i^+ - d_i^- = x_i - X_i,\ i = 1, \cdots, n$$

$$d_i^+ d_i^- = 0,\ i = 1, \cdots, n$$

$$d_i^+, d_i^- \geq 0,\ i = 1, \cdots, n$$

意即買進股票 i 時將使得 $x_i - X_i > 0$，則 $d_i^+ > 0$ 、$d_i^- = 0$；反之賣出股票 i 時將使

得 $x_i - X_i < 0$，則 $d_i^+ = 0$、$d_i^- > 0$。因此股票交易成本函數可表示為

$$C(\mathbf{x}-\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} V_{iT}(F_i^b d_i^+ + F_i^s d_i^-)$$

關於期貨及選擇權的交易部分，因為這兩類商品有著最後交易日的限制，所以不能像股票一樣一直持有，因此這兩類商品必須在履約日之前平倉退出。故在此限制調整期貨及選擇權時，需將之前的部位全部平倉出場，才能再做新的交易。

期貨部分，假設調整之前的期貨數量為 W，調整方式即賣出原本 W 口及買入 w^+ 或放空 w^- 口新一期的期貨，以 h 表示在時間 T 買賣期貨的每單位交易成本，而 K 則表示期貨交易每口的手續費；不論買進、賣出或做多、做空，皆需要付出一部份依照成交金額比例計算的成本以及依照交易數量計算的固定手續費。因此在交易數量上皆以契約口數來計算，即賣出原本 W 口、再交易 $w^+ + w^-$ 口的期貨。綜合上述討論，調整期貨時產生的交易成本 $C(w)$：

$$C(w) = (F_T h + K)(w^+ + w^- + W)$$

選擇權部分，假設調整之前的買、賣權數量為 Y、Z，調整方式為將原本 Y 口買權及 Z 口賣權進行平倉，之後買入 y_j^+、z_k^+ 或放空 y_j^-、z_k^- 新一期的選擇權，但選擇權調整時不論做多、做空皆包含交易稅 α 和固定手續費 β。綜合上述討論，調整選擇權時產生的交易成本：

$$C(y,z) = \sum_{j=1}^{m}[\alpha c_j + \beta](y_j^+ + y_j^-) + \sum_{k=1}^{p}[\alpha p_k + \beta](z_k^+ + z_k^-)$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}[(-1+\alpha)c_j + \beta]Y_j + \sum_{k=1}^{p}[(-1+\alpha)p_j + \beta]Z_k$$

如果調整時機在期貨及選擇權的履約日後，則調整投資組合時僅需考慮股票的交易成本，期貨及選擇權僅需重新購買即可。若調整時機在期貨及選擇權尚未到期前，則必須同時考慮股票、期貨及選擇權的交易成本。

經過以上對於交易成本的討論，可以將模型一的規劃模型改寫為調整追蹤目標線投資組合的混合整數非線性規劃模型。

模型三：調整追蹤目標線投資組合的模型

$$\min \qquad z = \sum_{t=1}^{T}(h_t^+ + h_t^-) + E_{\Omega}[Q(\omega)] \tag{4.1}$$

$$\text{s.t.} \qquad h_t^+ - h_t^- = \sum_{i=1}^{n} V_{it}x_i - G_t,\ \ t = 1,\cdots,T \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} V_{iT}x_i + \sum_{i=1}^{n} V_{iT}(F_i^b d_i^+ + F_i^s d_i^-) = \eta C \tag{4.19}$$

$$0 \le V_{iT}x_i \le \delta_i C,\ \ i = 1,\cdots,n \tag{4.4}$$

$$d_i^+ - d_i^- = x_i - X_i,\ \ i = 1,\cdots,n \tag{4.20}$$

$$d_i^+ d_i^- = 0,\ \ i = 1,\cdots,n \tag{4.21}$$

$$h_t^+, h_t^- \ge 0,\ \ t = 1,\cdots,T \tag{4.5}$$

$$x_i \ge 0,\ \ i = 1,\cdots,n \tag{4.6}$$

$$d_i^+, d_i^- \ge 0,\ \ i = 1,\cdots,n \tag{4.22}$$

其中 $Q(\omega) = \min\,(g_\omega^+ + g_\omega^-)$ (4.7)

$$\text{s.t.} \qquad g_\omega^+ - g_\omega^- = M(w^+ + w^-) + (F_\omega - F_{T)}(w^+ - w^-) + \sum_{j=1}^{m}(I_\omega - K_j)^+(y_j^+ - y_j^-)$$

$$+ \sum_{k=1}^{p}(K_k - I_\omega)^+(z_k^+ - z_k^-) - G_{T+L} \tag{4.8}$$

$$M(w^+ + w^-) + (F_T h + K)(w^+ + w^-)$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} c_j(y_j^+ - y_j^-) + (\alpha c_j + \beta)(y_j^+ + y_j^-)$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} p_k(z_k^+ - z_k^-) + (\alpha p_k + \beta)(z_k^+ + z_k^-)$$

$$= (1-\eta)C - \sum_{j=1}^{m}[(-1+\alpha)c_j + \beta]Y_j - \sum_{k=1}^{p}[(-1+\alpha)p_j + \beta]Z_k \tag{4.9}$$

$$0 \le M(w^+ + w^-) \le \varepsilon C \tag{4.10}$$

$$w^+ w^- = 0 \tag{4.11}$$

$$0 \le c_j(y_j^+ + y_j^-) \le \lambda_j C,\ \ j = 1,\cdots,m \tag{4.12}$$

$$0 \le p_k(z_k^+ + z_k^-) \le \rho_k C,\ \ k = 1, \cdots, p \tag{4.13}$$

$$w^+, w^- \in \mathbf{N} \cup \{0\} \tag{4.14}$$

$$y_j^+, y_j^- \ge 0,\ \ j = 1, \cdots, m \tag{4.15}$$

$$z_k^+, z_k^- \ge 0,\ \ k = 1, \cdots, p \tag{4.16}$$

$$g_\omega^+, g_\omega^- \ge 0 \tag{4.17}$$

決策變數：

x_i　股票 i 之投資數量

w^+　期貨的多頭部位數量

w^-　期貨的空頭部位數量

y_j^+　第 j 個買權多頭部位之投資數量

y_j^-　第 j 個買權空頭部位之投資數量

z_k^+　第 k 個賣權多頭部位之投資數量

z_k^-　第 k 個賣權空頭部位之投資數量

d_i^+　股票 i 調整時的買進數量

d_i^-　股票 i 調整時的賣出數量

h_t^+　投資組合中，股票的價值和目標線之間的正偏差

h_t^-　投資組合中，股票的價值和目標線之間的負偏差

g_ω^+　投資組合中，到期日時，期貨與選擇權價值和目標線之間的正偏差

g_ω^-　投資組合中，到期日時，期貨與選擇權價值和目標線之間的負偏差

參數與符號：

T　歷史資料的期數

n　投資股票總數

L　在時間點 T 時所投資的期貨及選擇權剩餘履約日

V_{it}　在時間 t 每單位股票 i 的價格

F_t　在時間 t 每口期貨的價格

δ_i　股票 i 占投資組合比重之上限

ε　期貨保證金占投資組合比重之上限

λ_j　買權部位占投資組合比重之上限

ρ_k　賣權部位占投資組合比重之上限

η　股票在投資組合的比例

C　建立時的總資產

F_i^b　在時間 T 買入股票 i 的每單位交易成本

F_i^s　在時間 T 賣出股票 i 的每單位交易成本

α　買賣選擇權的單位交易手續費

β　買賣選擇權的每口固定手續費

M　期貨交易每口需要提存的保證金

h　在時間 T 買賣期貨的每單位交易手續費

K　期貨交易每口的手續費

G_t　依據投資組合期望價值成長率所設定的目標線

X_i　股票 i 調整前的投資數量

W　期貨調整前的原投資數量

Y_j　履約價為 c_j 的買權 j 調整前的投資數量

Z_k　履約價為 p_k 的賣權 k 調整前的投資數量

此模型的目的是在最小化調整後的第一階段投資組合與目標線之間的絕對值偏差總和和第二階段投資組合與目標線之間的絕對偏差之期望值的調整方式。限制式(4.19)為調整前後資產價值的平衡式，讓調整後股票總值與交易成本的和等於右式的投資金額。由於沒有新的資金投入，因此左右兩式需要相等，達到資金平衡的效果，該一限制又稱做自我融資限制式。限制式(4.20)與(4.22)是將調整時股票調整數量分解為買進數量 d_i^+ 與賣出數量 d_i^- 兩非負變數之差。但實務上不會同時買賣相同股票，故需加入限制式(4.21)以避免兩者同為非零解。

同模型一，透過離散情境的引進，將其改寫為非隨機性等價模型，考慮離散情境 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots\}$ 及對應的機率值 P_ω，以下給定模型三的確定性等價模型：

模型四：模型三的非隨機性等價模型

$$\min \quad z=\sum_{t=1}^{T}(h_t^{+}+h_t^{-})+\sum_{\omega\in\Omega}P_{\omega}(g_{\omega}^{+}+g_{\omega}^{-}) \tag{4.1}$$

$$\text{s.t.} \quad h_t^{+}-h_t^{-}=\sum_{i=1}^{n}V_{it}x_i-G_t,\ \ t=1,\cdots,T \tag{4.2}$$

$$g_{\omega}^{+}-g_{\omega}^{-}=M(w^{+}+w^{-})+(F_{\omega}-F_{T)}(w^{+}-w^{-})+\sum_{j=1}^{m}(I_{\omega}-K_j)^{+}(y_j^{+}-y_j^{-})$$

$$+\sum_{k=1}^{p}(K_k-I_{\omega})^{+}(z_k^{+}-z_k^{-})-G_{T+L},\ \ \forall\omega\in\Omega \tag{4.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n}V_{iT}x_i+\sum_{i=1}^{n}V_{iT}(F_i^{b}d_i^{+}+F_i^{s}d_i^{-})=\eta C \tag{4.19}$$

$$M(w^{+}+w^{-})+(F_Th+K)(w^{+}+w^{-})$$

$$+\sum_{j=1}^{m}c_j(y_j^{+}-y_j^{-})+(\alpha c_j+\beta)(y_j^{+}+y_j^{-})$$

$$+\sum_{k=1}^{p}p_k(z_k^{+}-z_k^{-})+(\alpha p_k+\beta)(z_k^{+}+z_k^{-})$$

$$=(1-\eta)C-\sum_{j=1}^{m}[(-1+\alpha)c_j+\beta]Y_j-\sum_{k=1}^{p}[(-1+\alpha)p_j+\beta]Z_k \tag{4.9}$$

$$0\le V_{iT}x_i\le\delta_i C,\ \ i=1,\cdots,n \tag{4.4}$$

$$0\le M(w^{+}+w^{-})\le\varepsilon C \tag{4.10}$$

$$w^{+}w^{-}=0 \tag{4.11}$$

$$0\le c_j(y_j^{+}+y_j^{-})\le\lambda_j C,\ \ j=1,\cdots,m \tag{4.12}$$

$$0\le p_k(z_k^{+}+z_k^{-})\le\rho_k C,\ \ k=1,\cdots,p \tag{4.13}$$

$$d_i^{+}-d_i^{-}=x_i-X_i,\ \ i=1,\cdots,n \tag{4.18}$$

$$d_i^{+}d_i^{-}=0,\ \ i=1,\cdots,n \tag{4.21}$$

$$h_t^{+},h_t^{-}\ge 0,\ \ t=1,\cdots,T \tag{4.5}$$

$$x_i\ge 0,\ \ i=1,\cdots,n \tag{4.6}$$

$$w^+, w^- \in \mathbf{N} \cup \{0\} \tag{4.14}$$

$$y_j^+, y_j^- \geq 0,\ \ j = 1, \cdots, m \tag{4.15}$$

$$z_k^+, z_k^- \geq 0,\ \ k = 1, \cdots, p \tag{4.16}$$

$$g_\omega^+, g_\omega^- \geq 0 \tag{4.17}$$

$$d_i^+, d_i^- \geq 0,\ \ i = 1, \cdots, n \tag{4.22}$$

4.3 實證研究

本論文以台灣上市股票市場與期貨交易市場為實證分析對象，並以佔台灣股票市場七成比例以上的摩根士丹利資本國際公司台灣股價指數(MSCI Taiwan Index)的成分股作為投資組合的投資標的。期貨及選擇權商品則係以台指期貨及台指選擇權，其投資標的物為台灣發行量加權股價指數，能夠明確反映市場走勢。

股票、期貨及選擇權的相關資訊取自 TEJ 台灣經濟新報資料庫。股票部分，研究時間及對象分別為 2004 年 1 月 2 日至 2009 年 2 月 6 日時期，MSCI Taiwan Index 成分股中的 116 種股票，對象為 MSCI 官方網頁所發布的 116 種股票，扣除 11 種在資料選取之間才上市掛牌交易的股票，以剩下的 105 種股票做為實證分析的選取成分，並以每週收盤價格資料作為實證計算時的每周數據來源。台指期貨及台指選擇權的部分，研究時間及對象同樣取自 2004 年 1 月 2 日至 2009 年 2 月 6 日。

根據投資組合的建立時間，選擇不同履約月份的期貨及選擇權，如建立時間在當月期貨及選擇權的最後交易日前，則履約月份選定為隔月的期貨和選擇權，如在最後交易日後，由於距離隔月的最後交易日不滿四周，因此選擇隔兩個月為履約月份的期貨及選擇權做為考量，並以每週最後一交易日的最後成交價格資料作為實證分析的數據來源。

實證分析將以兩大主題進行討論：

一、探討在不同時間段，建立的投資組合績效表現差異。

二、針對不同報酬率與兩部分資產比重下，調整投資組合的表現差異。

本實證研究於 Intel® Core™ i5 CPU 2.40GHz 和 4.00GB 記憶體的電腦環境下進行，並透過 GAMS (Brooke、Kendrick 與 Meeraus，1988)軟體對數學模型進行求解。在此先針對模型中的參數做以下設定：

- 建立投資組合的起始投資總金額為 20 億，即 $C = 2{,}000{,}000{,}000$。
- 為達到有效分散風險目的，將每種股票投資金額上限設定為總資產的 10%，即 $\delta_i = 0.1$，$i = 1, \cdots, 105$。
- 為了避免保證金餘額不足而被催繳保證金的情形經常發生，因此將每口期貨的原始保證金提高設定為 30 萬，約為實證研究當時，期貨之維持保證金 5.9 萬的五倍，即 $M = 300{,}000$。
- 第一部分的投資組合投資總金額為總資產的 70%，即 $\eta = 0.7$。
- 設定期貨保證金提存總金額上限為總資產的 20%，即 $\varepsilon = 0.2$。
- 設定每種選擇權個別投資總金額上限為總資產的 10%，即 $\lambda = \rho = 0.1$。
- 買入股票的交易成本只有手續費，其為交易金額的 0.1425%；賣出股票的交易成本則包含手續費與證券交易稅，為交易金額的 0.4425%，即 $F_i^b = 0.001425$、$F_i^s = 0.004425$，$i = 1, \cdots, 105$。
- 期貨交易包含交易金額 0.004%的期貨交易稅與每口 100 元固定手續費的交易成本，即 $h = 0.00004$、$K = 100$。
- 選擇權的交易成本交易金額的 0.1%的選擇權交易稅及每口 50 元的固定手續費。
- 選擇權的履約價格選用投資組合建構日時交易量最高的五個序列。
- 情境樹設定為單一週期，時間點為在期貨及選擇權在到期日當天；為避開情境樹生成的計算複雜度，簡易設定到期日的指數價格為建構日當時的指數和上、下一百及兩百點，共五種情境，機率皆相同。

4.3.1 不同時段投資組合的績效表現分析

2004 年 1 月 2 日至 2009 年 2 月 6 日期間共有 251 個交易週，以 2004 年 7

月 9 日做為第一組資料的建構日，並涵蓋建構日前 26 週及後 26 週，共 53 週，做為第一組資料的驗證時間，爾後每隔 4 週做為隔一組資料的建構日，因此分為 T_1、T_2、⋯、T_{51} 共 51 組不同時間段的資料，各組資料的起迄日可參考附表一所示。每組研究區間為 53 週，前 26 週稱為內樣本時段(in-sample period)，在第 27 週建立一組投資組合能穩定追蹤前 26 週的追蹤目標，並於第 28 週至第 53 週進行該組合的觀測，而這段時間則稱為外樣本時段(out-of-sample period)。

為方便比較市場指數、目標線與模型所建立的投資組合之變化，實證分析時將這些數值標準化，讓每組時間段中的第 27 個時段($t=27$)為建立投資組合的第 1 週，以該時期的市場指數、目標線與投資組合之市值做為各自的基準點，因此皆為 100%，而前後各週的市值則以該時間點的數據標準化。因此，便可顯示出各時間點相對於第 27 週的成長走勢。穩定成長目標線的年報酬率設定為 50%，意即半年報酬率 25%。若以轉換後的市值表示，則是期望半年後($t=53$)市值能由 100 成長為 125。

為檢測追蹤效果，分別計算其內外樣本平均追蹤誤差百分比及檢測投資組合報酬率與市場指數報酬率之差異，計算投資組合與市場指數的平均偏差百分比。在投資組合建立後 1 週($t=28$)、2 週($t=29$)、3 週($t=30$)、4 週($t=31$)、5 週($t=32$)、10 週($t=37$)、15 週($t=42$)和 25 週($t=52$)的追蹤誤差百分比和投資組合與市場指數的偏差百分比。表一列出全部 51 組追蹤誤差百分比的平均值，表二則列出全部 51 組投資組合與市場指數市值偏差百分比的平均值。

表一　T_1 至 T_{51} 時間段投資組合與目標線市值之追蹤誤差百分比平均值

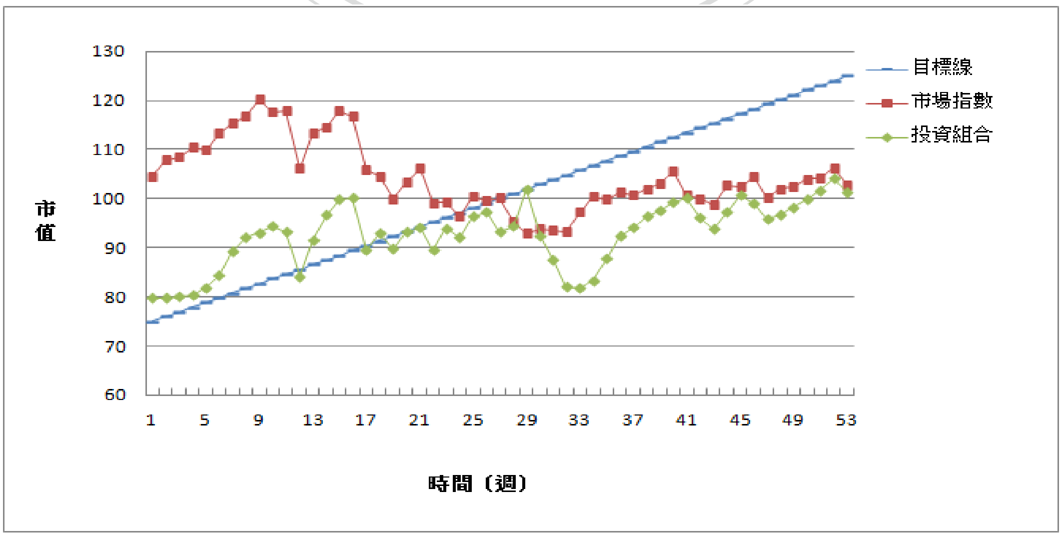
總平均	內樣本	外樣本時間(t)								外樣本
	平均	28	29	30	31	32	37	42	52	平均
對目標線	**1.05**	**12.47**	**13.10**	**15.07**	**23.63**	**24.89**	**27.28**	**29.34**	**36.47**	**27.38**

表二　T_1 至 T_{51} 時間段投資組合與市場指數市值之偏差百分比平均值

	外樣本時間(t)								外樣本
	28	29	30	31	32	37	42	52	平均
對市值	−5.33	−6.85	−7.71	−18.9	−19.8	−18.7	−16.7	−14.6	−16.6

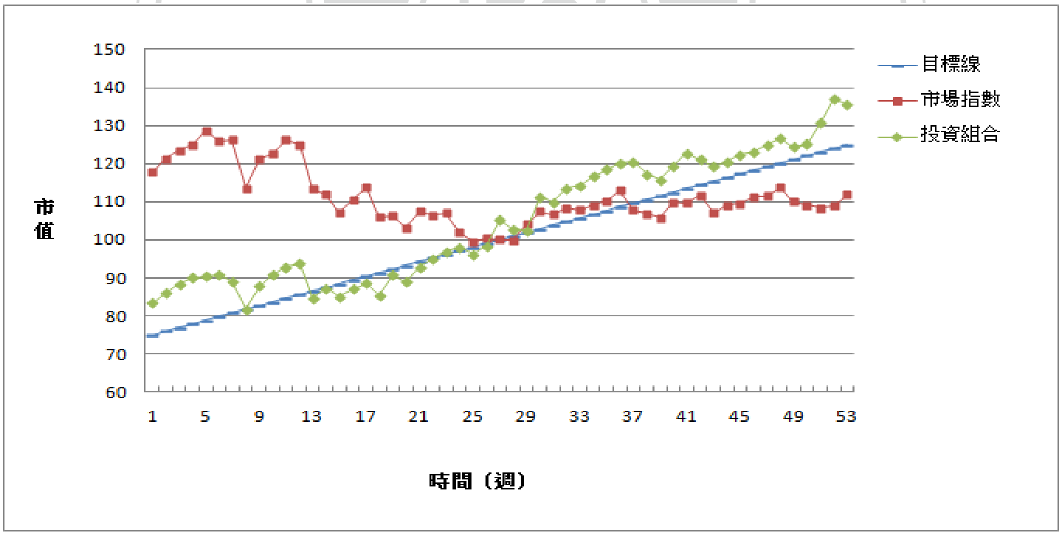
根據表一所示，在內樣本時段追蹤誤差平均為 1.05%，顯示各時間段依據內樣本時段資料所建立的投資組合都能很貼近目標線。在外樣本時間，追蹤誤差逐漸的增大，無法再有效的追蹤目標線，最主要的原因在於期貨及選擇權構成的第二階段投資組合，在到期日前，其商品價格會迅速縮水，這是因為選擇權的時間價值隨時間經而迅速下降，所以會在建構日後一段時間內將第二部分投資組合的價值蒸發掉，於下一個章節會針對兩部份投資組合的比重限制進行討論。由於外樣本追蹤誤差平均高達 27.38%，顯示在外樣本時段要追蹤到目標線是件極困難的事情

本論文在 51 組時間段進行實證分析研究，礙於篇幅，僅挑選出五個具有代表意義的時段來進行分析。首先為 T_1 與 T_2 時間段，其市場指數處於盤整時期，呈現上下震盪變化。圖一與圖二分別為 T_1 與 T_2 期間市場指數、目標線及投資組合的市值變化折線圖。橫軸部分表示時間 t，以週為單位；縱軸部分則表示市場指數、目標線及投資組合的市值。



圖一　T_1 時間段市場指數、目標線及投資組合的市值變化圖

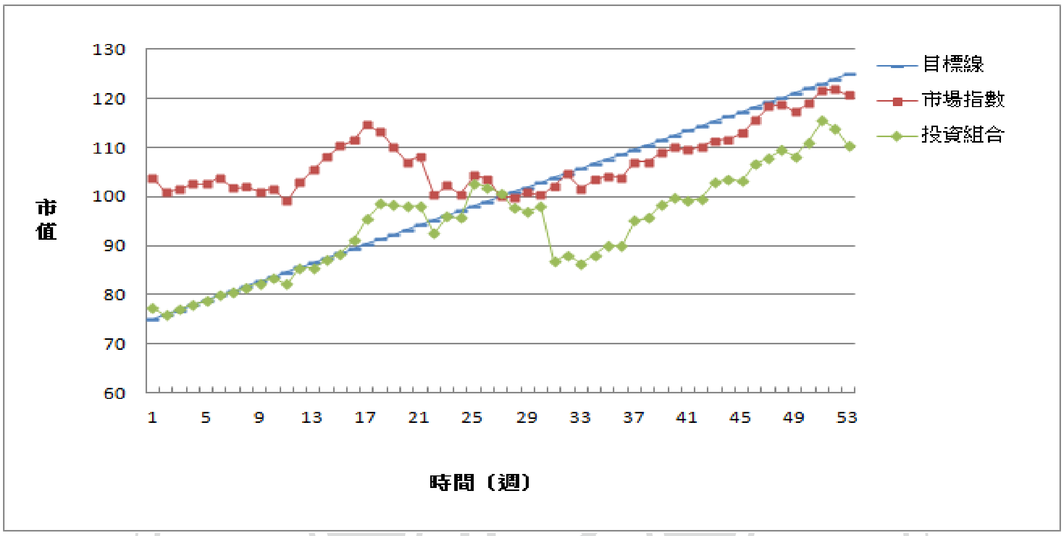
圖一與圖二是T_1與T_2時間段，在內樣本時段，投資組合的成長性與市場漲跌相似， T_1與T_2在外樣本時段都因為期貨及選擇權部位價值蒸發而無法有效追蹤目標線，但進一步觀察外樣本時段可以發現，投資組合的漲跌和指數市場的漲幅依然相似，更甚者，與追蹤目標線的成長趨勢一致；觀察T_1時間段，在履約後整體價值下降，但緊接著市場上漲時期，投資組合的漲幅較市場的漲幅顯著，因此更能接近目標線；觀察T_2時間段，除了在期貨及選擇權履約時而造成投資組合的價值下跌外，經由平移可以發現，其餘時間點的成長性和目標線有著相同的成長趨勢，且成長斜率微微超過市場指數的成長趨勢。這是由於T_1與T_2時間段，市場位於盤整時期，而內樣本時段建立的第一階段投資組合所選中的股票，除了在內樣本時期和市場指數有著相似的成長性及目標線的穩定成長趨勢外，在外面樣本時期也有著相當顯眼上漲幅度，因此投資組合在外面本時間能持續成長，進而從履約後上漲 20%左右。因此，扣除期貨及選擇權部位，則投資組合應能有效追蹤的到目標線。



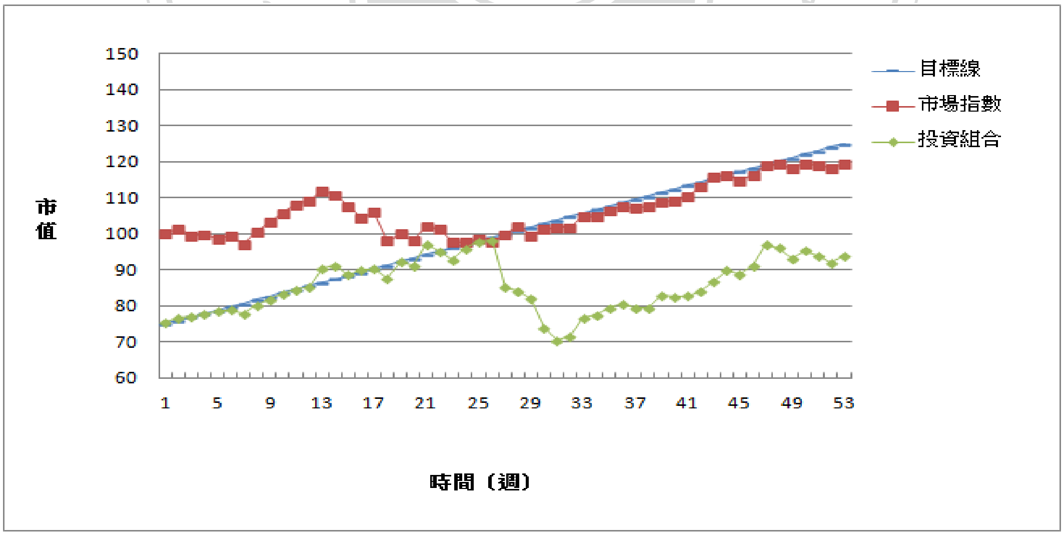
圖二　T_2時間段市場指數、目標線及投資組合的市值變化圖

圖三與圖四分別為T_{27}與T_{28}時間段市場指數、目標線及投資組合的市值變化折線圖。這兩時期的市場指數呈現上下震盪，而後趨於平緩上漲的走勢。觀察圖三與圖四可以得到，投資組合於T_{27}與T_{28}時間段，在外樣本時段都遇到履約後部位價值蒸發的狀況，與T_1及T_2兩時間段相似之處在於在後期的成長幅度都很高，幅度從 25%至 30%左右，再一次顯示期貨與選擇權對於追蹤目標線的影響。

而與T_{27}時段的投資組合後期能在漸漸接近到指數市場及成長線相比，T_{28}時段與市場及目標線的差距則無顯著縮小則大幅度超越預期的目標線。兩時間段建立的投資組合，其股票部分構成成分及比例雖然差異不大，但前者選中了具有成長潛力的股票做為組成成份股，而這也顯現出挑選適當股票及調整投資組合的重要性。



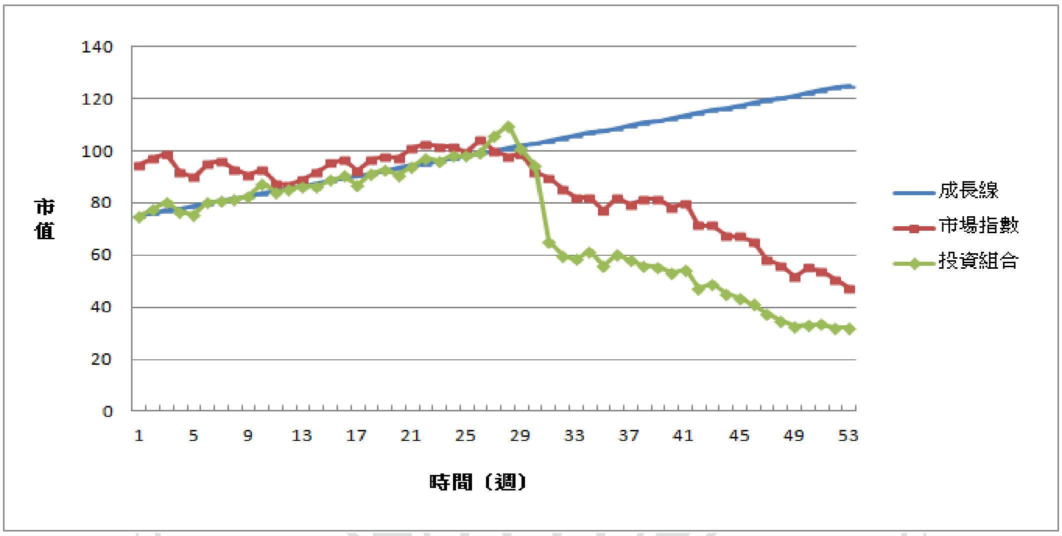
圖三　T_{27}時間段市場指數、目標線及投資組合的市值變化圖



圖四　T_{28}時間段市場指數、目標線及投資組合的市值變化圖

若能在指數漲跌的預測上找到更好的方式，將能提升期貨及選擇權的避險效果，藉此提供投資組合額外的成長及保險。此外，若能在第二階段投資組合的價格在高點或停損點前進行調整，將是一項能使投資組合持續成長的穩健策略。

圖五為T_{51}時間段市場指數、目標線及投資組合的市值變化折線圖，此一時期的市場指數前期走勢上下波動，在建構日前一路下跌。這一時間段的資料提供了投資組合調整策略的充分性和必要性。由於市場走勢日漸下滑，因此高履約價的賣權權利金價格飆高，進而帶動第二部分投資組合在履約日前的市場價格飆高，也因此投資組合的價格隨之攀升，但在履約日即將到達前後，選擇權權利金價值蒸發只剩下內含價值，因此投資組合的成長會受到市場走勢而跟著下跌。



圖五　T_{51}時間段市場指數、目標線及投資組合的市值變化圖

4.3.2 投資組合調整及不同參數下的績效表現分析

經由前一節的實證分析顯示，在建構日後的四至六周起，第二階段投資組合部位會隨著履約日的接近而失去其時間價值，雖然投資組合的成長性在之後仍然有相當好的表現，但是因前述原因而蒸發掉的權利金造成投資組合無法有效追蹤目標線。透過定期不斷地對投資組合進行調整，可避免權利金蒸發造成的價值損失，因此，調整時機及頻率是一件十分重要的關鍵，調整次數過多會造成交易費用的升高，調整時機太晚可能會使得投資組合已經偏離目標過遠。

因此投資組合的調整時機也需慎選。根據表一所示，投資組合在第 4 週起的追蹤誤差大幅增加，表二亦顯示在建立後的第 4 週($t=31$)，投資組合與市場指數市值的偏差變大。因此，設定投資組合在每 4 週後就重新調整其成分，使其能更有效追蹤目標線。

在本章節裡，由於調整模型及兩類參數設定的影響，主要針對三個方向進行分析及討論：

一、投資組合定期調整的表現；

二、探討在不同資產比例下，投資組合績效表現的差異性

三、檢測給定目標線不同報酬率對投資組合成長性之影響

對於調整投資組合的實證分析，本文將針對兩時間段的資料進行投資組合的建構與定期調整，此兩組資料的起訖日分別如下：

A：2004/01/02～2005/07/15

B：2006/01/13～2007/07/20

A 時段，市場指數在 6000 點上下震盪。

B 時段，則為市場指數上漲時期，由 6600 點逐漸上揚至 9500 點。

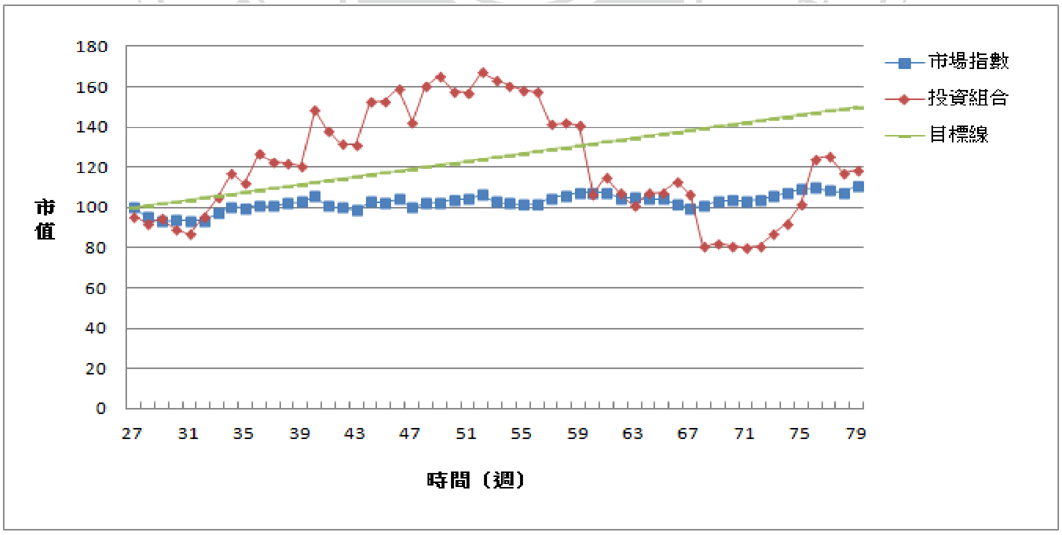
這兩組時間段包含 79 週的資料數據，設定第 27 週($t=27$)為投資組合建立的第 1 週，其後每 4 週就重新調整投資組合，換句話說，即在第 31、35、…、75 週($t=31,35,\cdots,75$)進行調整，並設定第 27 週的市場指數、目標線與投資組合

之市值設定為基準點，將每一週的市值依此基準點進行標準化。

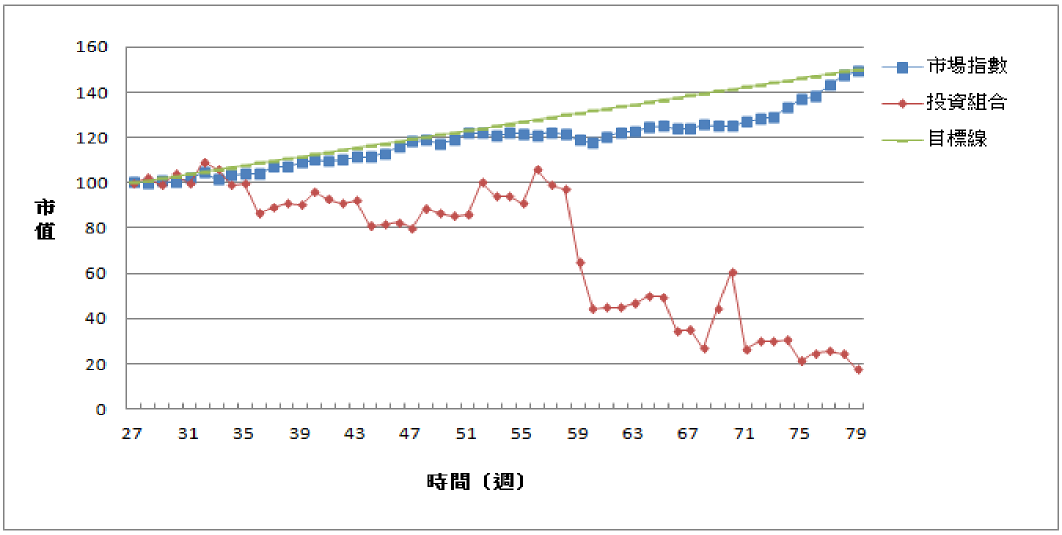
(一) 探討調整投資組合的績效表現分析

圖六為 A 時間段投資組合建立後每隔四週不斷調整的市值折線圖。橫軸部份表示投資的時間t，以週為單位；縱軸部份則表示市場指數、目標線及投資組合的市值。

此處投資時間t僅列出投資組合初始建立($t=27$)至一年後($t=79$)的時段。由圖可以觀察投資組合的市值在半年從 100 不斷地成長到 167，但隨後下跌到 80，最後回升至 120 上下，可以得到投資組合在盤整時間段無法有效的追蹤到目標線此一結論。在上下震盪時期中，雖然擁有期貨及選擇權避險部位，但是由於建立投資組合的情境樹數量太少，經常會有錯估未來市值的情況發生，因此，投資組合的價值在錯估未來市值時會因期貨及選擇權部位而提供而外獲利，但也會因相同的原因使得投資組合的價值快速下降。在此顯示出兩部份投資組合的比例是一項不可忽略的因素。



圖六 A 時間段市場指數、目標線及投資組合的市值變化圖



圖七 B 時間段市場指數、目標線及投資組合的市值變化圖

圖七為投資組合在 B 時間段建立後每隔四週不斷調整的市值變化圖。與 A 時間段的盤整時期相比，B 時間段的市場指數平滑但穩定成長的趨勢，但投資組合卻隨著時間的快速遞減，在投資組合的價值在建立的半年左右降到 50 上下，雖然在曾一度在三週內攀升近 20 個百分點，但最後仍呈現下降走勢，這是因為期貨及選擇權的部位比例過高(30%)及誤估市場未來發展所導致，實在是「成也避險，敗也避險」。

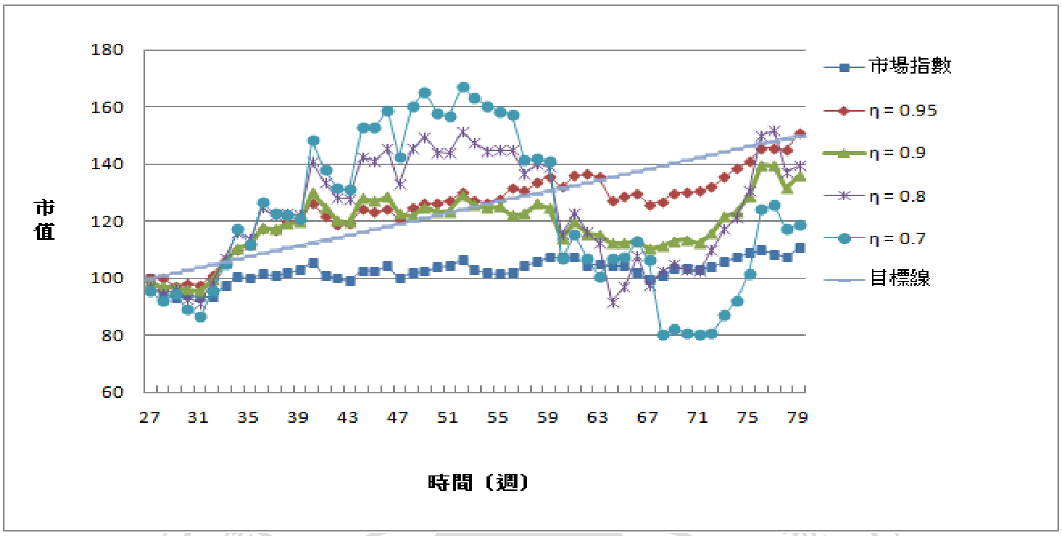
(二) 探討兩部份投資組合間不同比例下的績效表現差異性

在上一小節，對於兩段不同發展情勢的指數市場進行投資組合的建立及定期調整，可以看出投資組合的價值會因第二階段投資組合的比例過高而不穩定，因此產生了在盤整階段大漲大跌及市場平穩上漲時投資組合價值快速蒸發的現象。

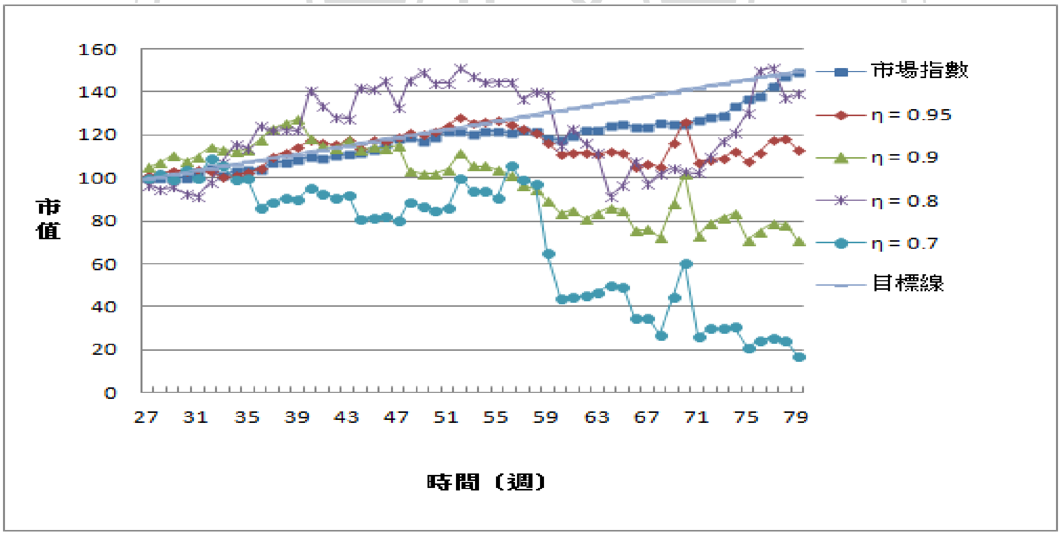
為此，本小節就兩部份投資組合的投資比例對於其價值及調整之影響，分別將兩部分比重參數η設定為：0.95、0.9、0.8、0.7。

圖八、圖九為兩部份投資比例設定為 0.95、0.9、0.8、0.7 下，投資組合、目標線與市場指數分別在 A、B 兩時間段的市值變化比較圖。橫軸部份表示投資的時間t，以週為單位；縱軸部份則表示市場指數、目標線和投資組合的市值。投資時間t在此亦僅列出投資組合初始建立($t=27$)至一年後($t=79$)的時段。

為簡化敘述，將兩部份比例限制設為 0.7 的投資組合稱為$\eta-0.7$；同理，$\eta-0.95$、$\eta-0.9$、$\eta-0.8$及$\eta-0.7$分別表示兩部份投資比例設定為 0.95、0.9、0.8 與 0.7 之投資組合。其中$\eta-0.7$即為前一節實證分析的投資組合。



圖八 A 時間段不同投資比例的市值變化比較圖



圖九 B 時間段不同投資比例的市值變化比較圖

觀察圖八可以發現，不論兩部份投資比例為何，都會有顯著的上下震盪，但震盪幅度隨著第一部分的比重越高而越小，因此，得到兩部份不同的投資比例會與投資組合的成長穩定性有所關聯的結論。此外，在盤整時期，雖然無法達成晚全穩定，但是越高的投資比例也會使得投資組合更接近目標線。

圖九則可看出第二階段投資組合對於投資組合的影響性，$\eta-0.95$、$\eta-0.9$及$\eta-0.7$這三種設定下的投資組合，雖然價值不相同，但是在最後約二十週有著完全相同的成長曲線，唯有$\eta-0.8$和其他三者有著不同型態的變化走勢，雖然由於投資比例不低而導致價格上下波動顯著，但也因此提供了額外的資金以購入更多未來成長性較好的股票。在這類狀況的存在下，更凸顯出投資比例選取的重要性。

綜合上述分析，雖然投資比例的改變能夠提供投資組合追蹤目標線的能力，但有同樣具有讓投資組合價值大幅縮水的可能性，因此，追蹤模型的重點在於能否視市場狀況，藉由資訊的更新以調整投資比例及投資組合成分，藉此購入高度上漲潛力的股票及適當數量的期貨及選擇權以進行避險。

(三) 檢測不同報酬率的目標線對投資組合之影響

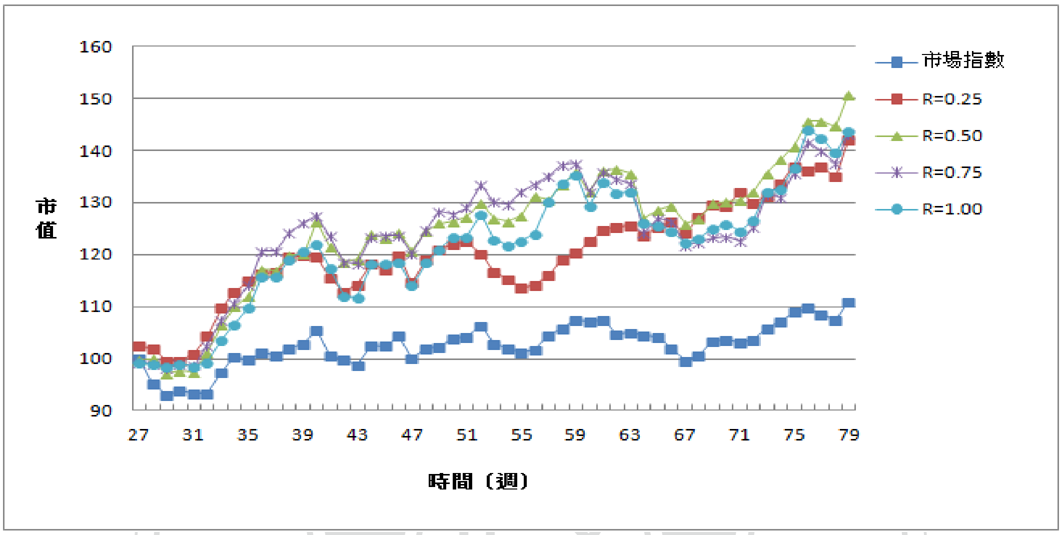
為比較不同目標報酬率對於建立投資組合的影響，以下以每四周調整一次的方式，對年報酬率為 25%、50%、75%及 100%的目標線進行追蹤。設定第 27 週的市值基準點，其後各週的市值皆依此週之價格做標準化，則期望投資組合在一年後的市值分別變為 125、150、175 和 200。

圖十、圖十一、圖十二與圖十三、圖十四、圖十五為η-0.95、η-0.9 及η-0.8 三種投資比例設定下對於目標報酬在 25%、50%、75%、100%之下，投資組合與市場指數分別在 A 時間段與 B 時間段的市值變化比較圖。橫軸部份表示投資的時間t，以週為單位；縱軸部份則表示市場指數和投資組合的市值；並以R表示目標報酬率，即報酬率 25%、50%、75%、100%分別表示為$R=0.25$、$R=0.50$、$R=0.75$、$R=1.00$。投資時間t在此僅列出投資組合初始建立$(t=27)$至一年後$(t=79)$的時段。

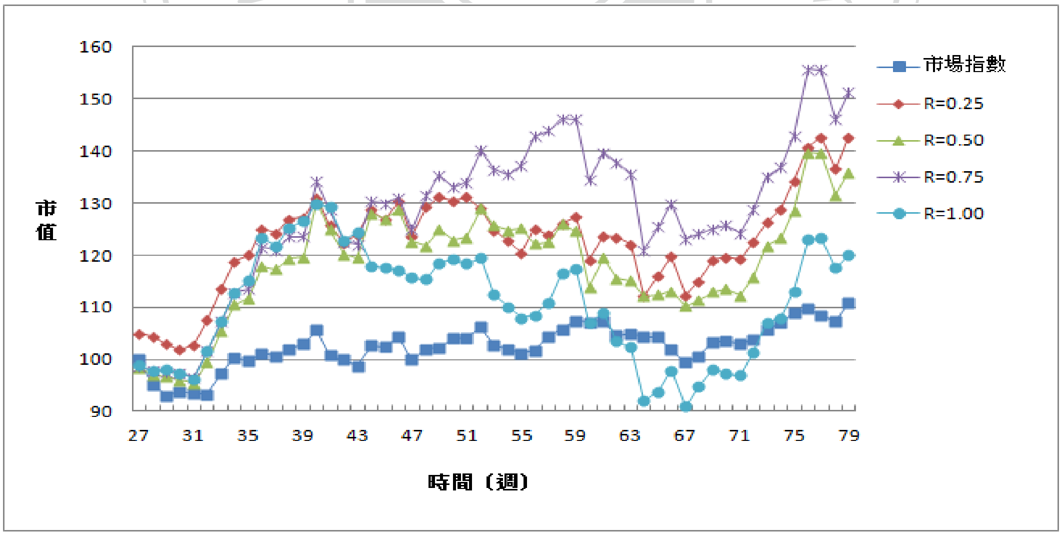
同上小節，為簡化敘述，以下將目標線報酬率為 25%的投資組合稱為 R-25；同理，R-50、R-75 及 R-100 分別表示目標線報酬率設定為 50%、75%與 100%。

觀察圖十可以發現，由於投資在第一階段投資組合的金額為 95%，因此，期

貨及選擇權部份對於投資組合價值的影響有限。比較四種投資報酬率，唯有 R-50 能在一年後達成目標報酬率，但離穩定追蹤目標線仍有一段差距，這主要是受到盤整時期，股票價格不穩定所影響。在四種投資報酬率下的投資組合組成皆以過去穩定成長的股票組合而成，再加上第二階段投資組合比例極低，因此投資組合的成長走勢極度相似。



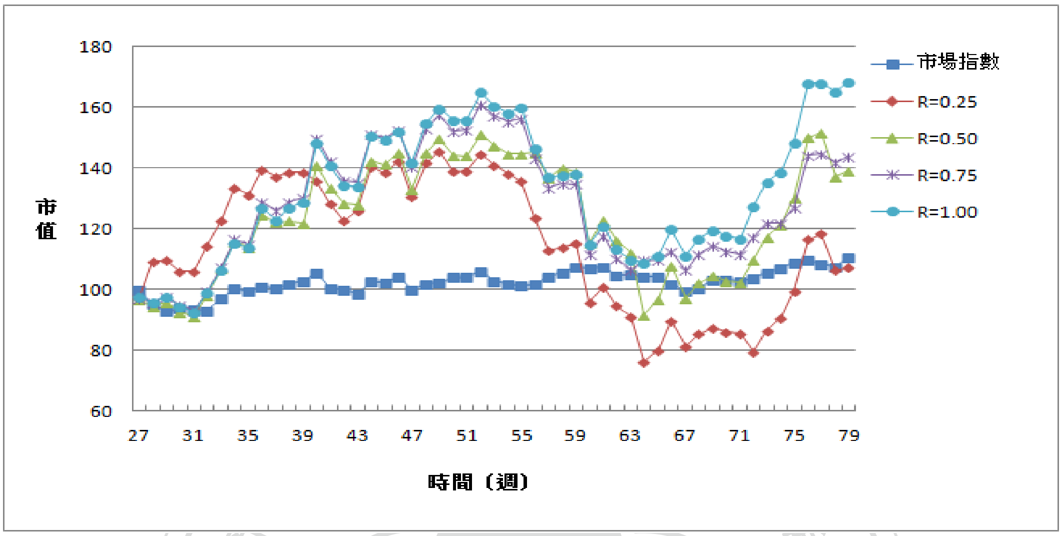
圖十 A 時間段$\eta-0.95$對不同目標報酬率的市值變化比較圖



圖十一 A 時間段$\eta-0.9$對不同目標報酬率的市值變化比較圖

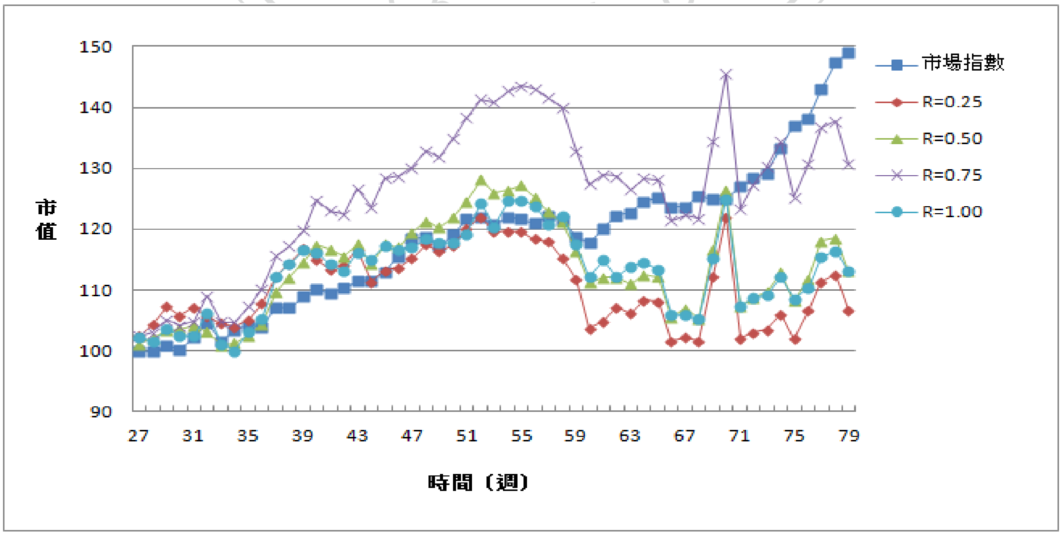
將圖十一與圖十對照，兩者僅在投資比例的設定只相差 5%，但是η-0.9 狀況下，各種目標追蹤的投資組合價值走勢震盪不斷。比較 R-75 及 R-100 可以發現兩者雖為高目標報酬，但後者受期貨及選擇權部分影響，錯誤市場導致避險部

為成了價值流失的最主要原因。雖然提供了相對高的投資報酬率，但兩圖相比，在$\eta-0.9$的設定下，沒有任何一組投資組合能在達到目標報酬率，也因此無法追蹤到目標線。

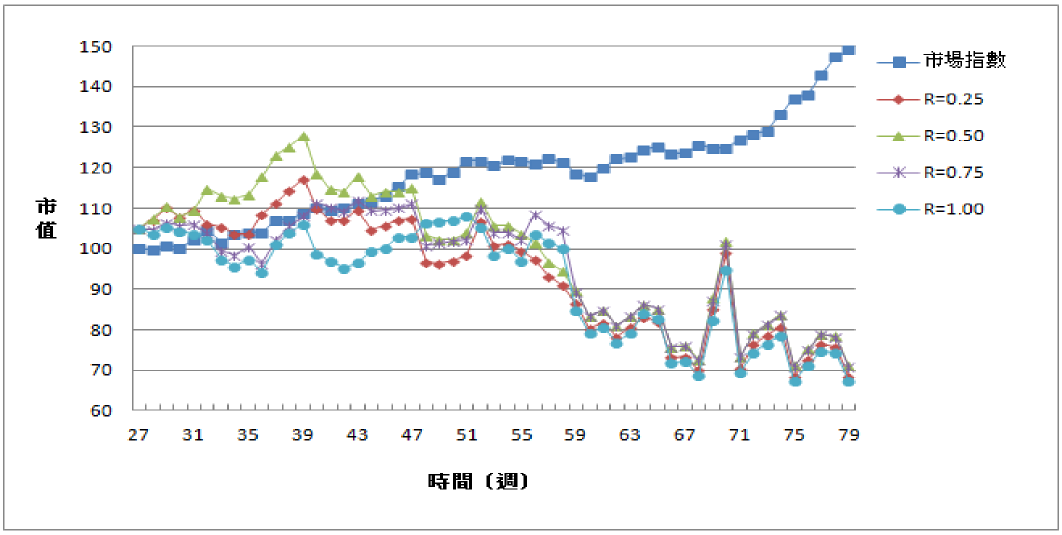


圖十二 A 時間段$\eta-0.8$對不同目標報酬率的市值變化比較圖

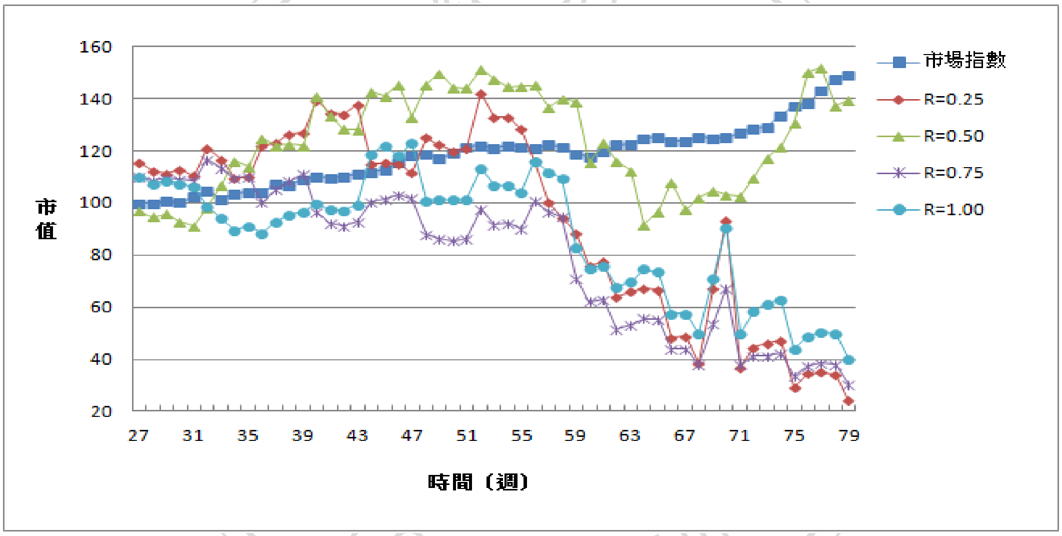
圖十二顯示，R-25、R-50、R-75 及 R-100 皆發生半年內跌幅 60%的情況，因此，當第二階段投資組合比例提升時，投資組合的價值上下震動劇烈，雖然在某些時期提供了遠超越目標報酬的投資報酬，但也伴隨著其價值隨期貨與選擇權隨市場波動及時間價值蒸發而降低的風險。



圖十三 B 時間段$\eta-0.95$對不同目標報酬率的市值變化比較圖



圖十四 B 時間段$\eta-0.9$對不同目標報酬率的市值變化比較圖



圖十五 B 時間段$\eta-0.8$對不同目標報酬率的市值變化比較圖

圖十三、圖十四與圖十五顯示，當投資組合建立好的半年後，適逢市場成長穩定期，各種投資比例特定下的投資組合皆能隨著市場波動有著相當好的成長率。

觀察圖十四及圖十五，有七條資料在中後期有著幾乎相同型態的成長曲線，這其中最主要的原因，不僅是因為報酬率的設定，更大的部分是因為對於未來市場的預估錯誤，導致期貨及選擇權的組成成份相似，也因此在此蒸發掉大量投資組合價值，這也顯示在市場上揚期間，錯估形勢進行過多避險動作會無法追蹤到目標線。

綜合上述討論，由於期貨及選擇權能額外提供承擔風險發生的損失，但同時也會隨著時間價值的消失而腐蝕掉投資組合的價值。此外，對於市場未來走勢的預測是否精確，也會影響到避險時後的決策行為，透過大量購入選擇權的結果，導致了權利金價值隨時間快速蒸發掉的結果，在達到避險效果前就漸漸損失，而隨著投資比例的改變，其價值震盪也有著極為顯著的變化。因此，若能依照當時市場環境適當的改變各種參數，如盤整時期以高報酬率為目標，降低期貨及選擇權的投資比例，如此一來，將能使投資組合的成長有著更大的彈性與空間。

第五章　模型的修正與實證研究

在實證研究時，由於情境樹的節點數量過少，因此根據上一章節所提出的數學模型建立的投資組合，其第二階段投資組合(期貨與選擇權部分)的價值，除了隨著時間價值的遞減而下降外，也因為情境樹涵蓋的情境太少，使得投資組合的建立有錯估形勢的情況發生，而此一狀況即使透過調整投資組合也無法防止惡化。因此，為使第二階段投資組合能有效發會避險及提供額外成長性的能力，我們將修正上一章節所提出的數學模型並進行實證分析。

楊靜宜(民 93)在其提出的選擇權交易策略的整數線性規劃模型中，除了給予建立投資組合的套利限制外，也額外提供了四種修正版本的套利模型，分別是：(一)到期日的股價大於下限 A；(二)到期日的股價小於上限 B；(三)到期日的股價落在 A 與 B 之間；(四) 到期日的股價落在 A 與 B 之外。本章將改寫楊靜宜的第四類型的投資組合建立模型作為修正後的第二階段模型，藉此讓投資組合在市場上漲或下跌時提供額外的成長能力。

5.1 修正建立投資組合的數學模型

首先，我們加入以下的設定以進行數學模型的修正：(一)同時考慮相同履約價的買權及賣權，K_j 代表第 j 個選擇權的履約價，其中 $j=1,2,\cdots,m$，$K_1<\cdots<K_m$；$y_j=y_j^+-y_j^-$ 為選擇權組合中買權的數量；$z_j=z_j^+-z_j^-$ 為選擇權組合中賣權的數量；c_j 代表履約價為 K_j 的買權價格；p_j 代表履約價為 K_j 的賣權價格，$j=1,2,\cdots,m$；(二)將到期日時的市場指數 I_T 插入各履約價間，共有 $m+1$ 種情形；（三）為使第二階段投資組合在指數市場上漲或下跌時，不僅能達到避險的功能，更能額外獲得成長性，因此，我們假設到期日時，標的指數會落在某個區間 (A,B) 之外，意即 $I_T\le A$ 或 $B\le I_T$，其中 $K_r<A<K_{r+1}$、$K_p<B<K_{p+1}$。

根據楊靜宜(民 93)的模型及上述假設，我們提出修正後的第二階段模型如下：

模型五：修正後的第二階段投資組合建立模型

$$\max E_{\Omega}[Q(\omega)] = \max\left\{\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{m}[(I_k-K_j)^+ - c_j](y_j^+ - y_j^-) + [(K_j - I_k)^+ - p_k](z_j^+ - z_j^-)\right)\right.$$

$$+\sum_{k=p+1}^{m+1}\left(\sum_{j=1}^{m}[(I_k-K_j)^+ - c_j](y_j^+ - y_j^-) + [(K_j - I_k)^+ - p_k](z_j^+ - z_j^-)\right)$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{m+1}(I_k - F_T)(w^+ - w^-)\right\}$$

s.t.

$$M(w^+ + w^-) + (F_T h + K)(w^+ + w^-)$$

$$+\sum_{j=1}^{m} c_j(y_j^+ - y_j^-) + (\alpha c_j + \beta)(y_j^+ + y_j^-)$$

$$+\sum_{k=1}^{p} p_k(z_k^+ - z_k^-) + (\alpha p_k + \beta)(z_k^+ + z_k^-) = (1-\eta)C \tag{5.1}$$

$$\sum_{j=1}^{q-1}(I_q - K_j)^+(y_j^+ - y_j^-) + \sum_{j=q+1}^{m}(K_j - I_q)^+(z_j^+ - z_j^-)$$

$$-\left[\sum_{j=1}^{m} c_j(y_j^+ - y_j^-) + p_j(z_j^+ - z_j^-)\right] > 0,\quad q = 1,\cdots,r \tag{5.2}$$

$$\sum_{j=1}^{r}(A - K_j)^+(y_j^+ - y_j^-) + \sum_{j=r+1}^{m}(K_j - A)^+(z_j^+ - z_j^-)$$

$$-\left[\sum_{j=1}^{m} c_j(y_j^+ - y_j^-) + p_j(z_j^+ - z_j^-)\right] > 0 \tag{5.3}$$

$$\sum_{j=1}^{p}(B - K_j)^+(y_j^+ - y_j^-) + \sum_{j=p+1}^{m}(K_j - B)^+(z_j^+ - z_j^-)$$

$$-\left[\sum_{j=1}^{m} c_j(y_j^+ - y_j^-) + p_j(z_j^+ - z_j^-)\right] > 0 \tag{5.4}$$

$$\sum_{j=1}^{q-1}(I_q - K_j)^+(y_j^+ - y_j^-) + \sum_{j=q+1}^{m}(K_j - I_q)^+(z_j^+ - z_j^-)$$

$$-\left[\sum_{j=1}^{m} c_j(y_j^+ - y_j^-) + p_j(z_j^+ - z_j^-)\right] > 0,\quad q = p+1,\cdots,m \tag{5.5}$$

$$0 \le M(w^+ + w^-) \le \varepsilon C \tag{5.6}$$

$$w^+ w^- = 0 \tag{5.7}$$

$$0 \le c_j(y_j^+ + y_j^-) \le \lambda_j C, \quad j = 1, \cdots, m \tag{5.8}$$

$$0 \le p_j(z_j^+ + z_j^-) \le \sigma_j C, \quad j = 1, \cdots, m \tag{5.9}$$

$$w^+, w^- \in \mathbf{N} \cup \{0\} \tag{5.10}$$

$$y_j^+, y_j^-, z_j^+, z_j^- \ge 0, \quad j = 1, \cdots, m \tag{5.11}$$

5.2 實證研究

本節採用的實證分析對象與上一章節的對象相同，雖數據多達 51 組，但礙於篇幅，本章節僅針對，T_1、T_{27}與T_{51}三組時間段進行分析及比較不同調整頻率的投資組合績效。

T_1時間段，指數在 5000 點至 6000 點內震盪，為盤整時期；T_{27}時間段，指數從 6500 點一路穩定上升至 8000 點；T_{51}時間段，指數在前 25 週由 8000 點上升至 9000 點後，之後一路下降至 4500 點左右。

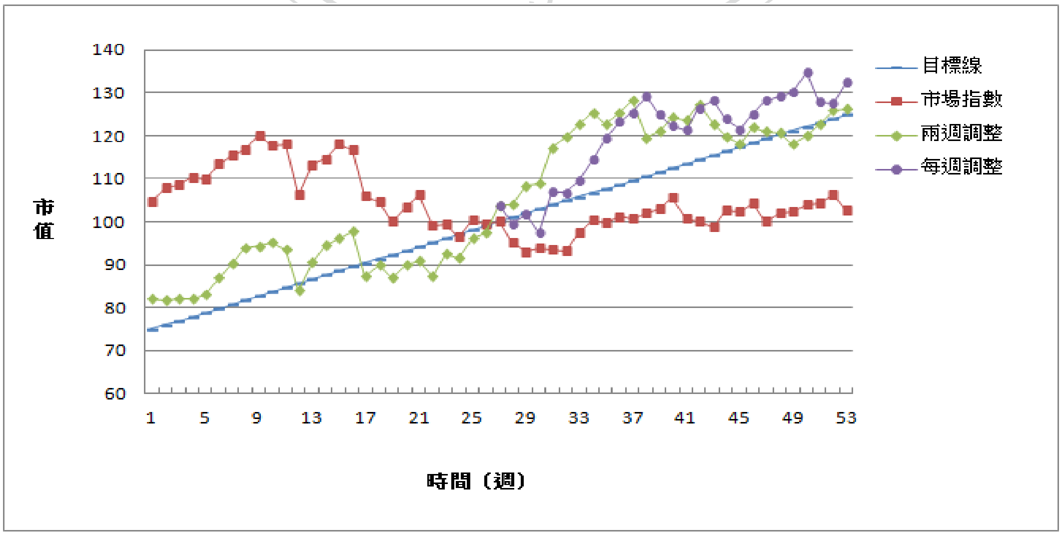
在此先針對模型中的參數做以下設定：

- 建立投資組合的起始投資總金額為 20 億，即$C = 2{,}000{,}000{,}000$。
- 為達到有效分散風險目的，將每種股票投資金額上限設定為總資產的 10%，即$\delta_i = 0.1$，$i = 1, \cdots, 105$。
- 為了避免保證金餘額不足而被催繳保證金的情形經常發生，因此將每口期貨的原始保證金提高設定為 30 萬，約為實證研究當時，期貨之維持保證金 5.9 萬的五倍，即$M = 300{,}000$。
- 第一部分的投資組合投資總金額為總資產的 80%，即$\eta = 0.8$。
- 設定期貨保證金提存總金額上限為總資產的 10%，即$\varepsilon = 0.1$。
- 設定每種選擇權個別投資總金額上限為總資產的 10%，即$\lambda = \sigma = 0.1$。
- 買入股票的交易成本只有手續費，其為交易金額的 0.1425%；賣出股票的交易成本則包含手續費與證券交易稅，為交易金額的 0.4425%，即

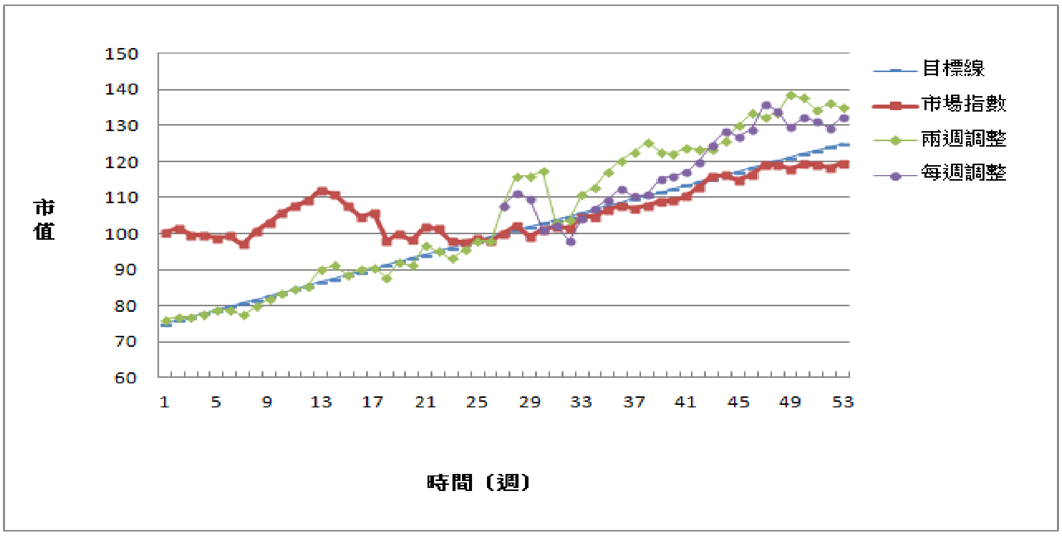
$f_i^b = 0.001425$、$f_i^s = 0.004425$，$i = 1, \cdots, 105$。

- 期貨交易包含交易金額 0.004%的期貨交易稅與每口 100 元固定手續費的交易成本，即 $h = 0.00004$、$K = 100$。
- 選擇權的交易成本交易金額的 0.1%的選擇權交易稅及每口 50 元的固定手續費。
- 選擇權的履約價格選用投資組合建構時，當時包含最接近市場指數的履約價與上下各七個連續履約價，共十五組序列。
- A 與 B 分別設定為最接近市場指數的履約價下上 325 點。
- 情境樹的情境設定為在期貨及選擇權在到期日當天；為避開情境樹生成的計算複雜度，設定到期日的指數價格為最高履約價加上 50 點、最低履約價減去 50 點及連續兩個履約價之間的平均，共十六個情境。
- 為了比較調整時機對於投資組合績效的差異，設定兩種不同調整方式：每兩週調整一次，連續調整四次；每週調整一次，連續調整八次。

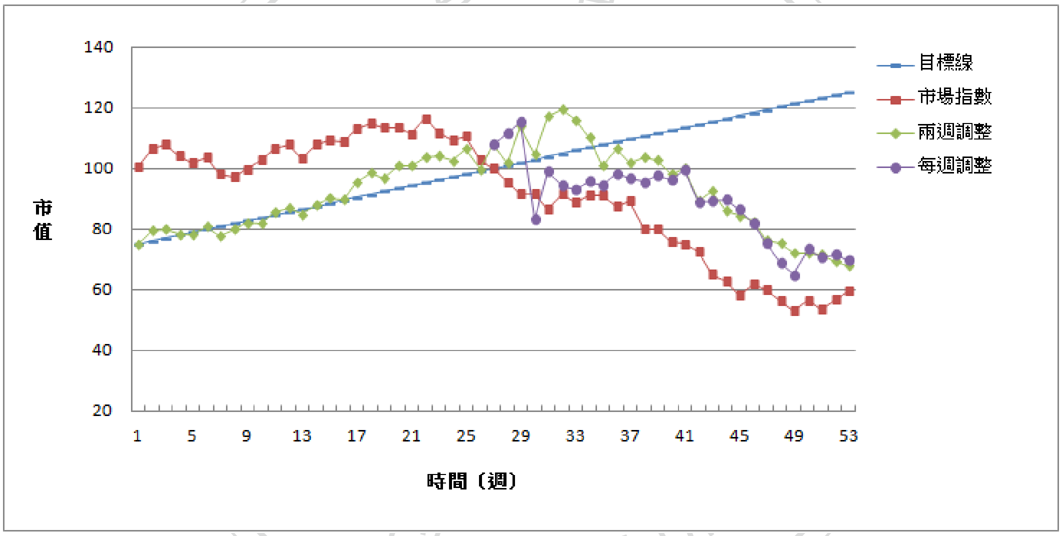
圖十六、圖十七與圖十八為三組時間段內，市場指數、目標線及投資組合的市值變化折線圖。橫軸部分表示時間 t，以週為單位；縱軸部分則表示市場指數、目標線及投資組合的市值。透過修正後的模型所得到的投資組合，雖成長性明顯超越上一章節的建構模型所得到的投資組合，並且能夠超越市場指數，但在追蹤的效果上的穩定度上仍有改善空間。



圖十六 T_1 時間段市場指數、目標線及投資組合的市值變化圖



圖十七　T_{27}時間段市場指數、目標線及投資組合的市值變化圖



圖十八　T_{51}時間段市場指數、目標線及投資組合的市值變化圖

這三個時間段分別代表著市場盤整時期、上漲時期與下跌時期；觀察圖十六與圖十七可以發現，由於第二階段投資組合無論買權或是賣權皆大量放空，因此在盤整時期，第二階段投資組合的權利金價值波動雖然額外提供了投資組合的成長性，但也失去了穩定追蹤的效果。

比較圖十七與圖十八，分別為上漲時期與下跌時期，投資組合的調整頻率反使得第一階段投資組合的成長走勢反應出市場趨勢，因此，調整頻率的差異反映

出投資組合對於市場的變動敏感度。透過調整，第二階段投資組合雖然來提供額外成長，但選擇權亦會雖著市場波動，其權利金價格也會快速變動，因此在下跌時期投資組合無法有效追蹤，但在上揚時期卻能跟著市場的上升趨勢而追蹤到目標線。

綜合上述討論，本章節提供的模型在建立投資組合時，為符合上漲與下跌時的套利限制，第二階段投資組合為最大化利潤，經常會透過賣出選擇權來賺取權利金，但市場的波動在選擇權平倉及調整時會反應到整體價值上，因此，看似最大化的利潤內藏著因市場波動性帶來的風險。而與上一章節相比，本章節提出的修正版投資組合能有效提供投資組合額外的資金，但在市場下跌時，會因放空選擇權而導致平倉時損失慘重，因此，是否能因時制宜的限制選擇權只能買或賣，便是未來可以討論的重點之一。

第六章　結論與建議

本論文提出一個二階段混合整數非線性規劃模型，用以建立追蹤穩定成長目標線的投資組合。但在實際的交易市場上，股票有著嚴格的放空限制，且考慮到避險的概念，透過對未來市場的期望及想像，藉由情境樹將期貨及選擇權商品以隨機規劃的形式也加入投資組合中。但投資組合建立一段時間後，如：選擇權隨著時間經過經常會有時間價值快速下降的狀況，又部分股票可能出現週期性衰退現象，而使得整體投資組合與目標線差異過大，引此本論文提出另一調整模型對投資組合成分進行調整，使其恢復較佳的績效表現。

透過對台灣股票市場、期貨交易市場及選擇權市場的實證分析，發現投資組合穩定追蹤目標線的困難性。透過更新資訊來調整股票的成份，雖然會損失交易成本，卻能藉由賣出低成長性的股票和買入高度成長潛力股使投資組合維持一定的成長率；期貨與選擇權部分，透過預測的方式使投資組合能避免市場下跌時的風險，但過度簡化的預測方式是會導致誤判市場形勢，使其失去避險功能，進而影響投資組合的成長。

在投資比例的討論中，過高的第二部份投資比例會導致投資組合價值的震盪劇烈，雖能提供額外且大量的投資報酬，但多數時期會阻礙到投資組合的成長與追蹤目標線，因此，能否因時制宜的調整投資比例成了重要關鍵。在報酬成長率的設定中，過高或過低的報酬率都會影響到投資組合的成長，因為過高的報酬率經常會購入風險性較高股票，因此上漲時表現亮眼，但下跌時也毫不留情；過低的報酬率雖能保守投資使其價值不易下跌，但也意味著成長空間有限。

為了改善上述的缺陷，本文亦提出了一修正版的投資組合建構模型，透過將改寫楊靜宜(民 93)提出選擇權套利限制，提出修正第二階段投資組合的數學模型，建立出一組具有在市場上漲或下跌時，不僅能提供避險更能提供額外成長性的投資組合。

透過同時間段的實證研究與討論，也進一步的發現套利假設經常透過賣出選

擇權來達成資金成長性，但並未考量到平倉時損益，也因此第二階段投資組合的價值經常雖然較先前提出的模型穩定，但依舊與市場的波動有著一定程度敏感的性。

本論文建立的投資組合雖然考量到股票、期貨及選擇權三類金融商品，且考量到交易成本與放空資產的限制，但仍然有許多狀況未考量到，具體如下：

一、股票及選擇權部份的整數限制。

二、保證金不足與從保證金帳戶提存現金等實際市場操作。

三、選擇權方面，將二元樹的概念引入選擇權的價格計算上，藉此修正對於投資組合價值的認定。

四、在二元情境樹上面進行動態決策及針對投資比例及目標線報酬等參數透過統計方法得到調整方式。

五、透過對市場的觀察，進一步對選擇權部位的買入或賣出進行限制。

六、透過不同數學模型對於欲選取的金融商品進行過濾。

由於隨機規劃上有著為數眾多的模型與各式各樣求解演算法，在情境樹方面，也有將歷史資料透過動差擬合、迴歸分析或是二元樹模型等等各類不同領域上的生成方式，如何找出適當的模型架構與金融商品作為投資組合的成份亦是一門重要的課題。此外，本論文因應投資組合的避險及對未來的預測而將期貨及選擇權納入投資組合當中，但許多金融體系的投資組合建構尚有債券及各類奇異選擇權能做為投資工具，因此針對不同投資工具提出相對應的規畫模型是件值得研究的課題。

參考文獻

Andrews, C., D. Ford, and K. Mallinson, The design of index funds and alternative methods of replication, *The Investment Analyst* **82** (October), 16-23 (1986).

Benders, J. F., Partitioning procedures for solving mixed-variable programming problems, *Numerische Mathematic* **4**, 238-252 (1962).

Brooke, A., D. Kendrick, and A. Meeraus, *GAMS-A User's Guide*, The Scientific Press, Redwood City, CA, (1988).

Canakgoz N. A., and J. E. Beasley, Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation, *European Journal of Operational Research* **196**, 384-399 (2008).

Feinstein, C. D., and M. N. Thapa, A reformulation of a mean-absolute deviation portfolio optimization model, *Management Science* **39** (12), 1552-1553 (1993).

Frauendorfer, K., The stochastic programming extension of the Markowitz approach *Journal on Neural and Mass-Parallel Computing and Information Systems* **5**, 449-460 (1995).

Gülpınar, N., B. Rustem, and R. Settergren, Multistage stochastic mean-variance portfolio analysis with transaction costs, *Innovations in Financial and Economics Networks* **3** , 46-63 (2003).

Kalvelagen, E., Two stage stochastic linear programming with GAMS, http://amsterdamoptimization.com/pdf/twostage.pdf, 2003

Konno, H., and H. Yamazaki, Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market, *Management Science* **37** (5), 519-531 (1991).

Markowitz, H., Portfolio selection, *Journal of Finance* **7** (1), 77-91 (1952).

Markowitz, H., *Portfolio selection: Efficient diversification of investmenst*, John Wiley & Sons, New York (1959).

Meade, N., and G. R. Salkin, Index funds-construction and performance measurement, *Journal of the Operational Research Society* **40** (10), 871-879 (1989).

Speranza, M. G., Linear programming models for portfolio optimization, *Finance* **14** (1), 107-123 (1993).

Steinbach, M., *Recursive direct optimization and successive renement in multistage stochastic programs*, Preprint SC 98-27, Konrad-Zuse Centrum für Informationstechnik Berlin, 1998.

Yao, D. D., S. Zhang, and X. Y. Zhou, Tracking a financial benchmark using a few assets, *Operations Research* **54** (2), 232-246 (2006).

Young, M. R., A minimax portfolio selection rule with linear programming solution, *Management Science* **44** (5), 673-683 (1998).

莊智祥，*使用目標規劃建立指數基金*，國立政治大學應用數學系碩士論文（民 87）。

楊靜宜，*選擇權交易策略的整數線性規劃模型*，國立政治大學應用數學系碩士論文（民 93）。

陳明瑩，*考慮交易成本的選擇權交易策略*，國立政治大學應用數學系碩士論文（民 96）。

謝承哲，*追蹤穩定成長目標線的投資組合最佳化模型*，國立政治大學應用數學系碩士論文（民 99）。

附錄　附表

附表一　不同時間段資料的起迄日

T_1 ：2004/01/02~2005/01/07	T_{19}：2005/06/03~2006/06/02	T_{37}：2006/10/20~2007/10/26
T_2 ：2004/02/06~2005/02/03	T_{20}：2005/07/01~2006/06/30	T_{38}：2006/11/17~2007/11/23
T_3 ：2004/03/05~2005/03/11	T_{21}：2005/07/29~2006/07/28	T_{39}：2006/12/15~2007/12/21
T_4 ：2004/04/02~2005/04/08	T_{22}：2005/08/26~2006/08/25	T_{40}：2007/01/12~2008/01/11
T_5 ：2004/04/30~2005/05/06	T_{23}：2005/09/23~2004/09/22	T_{41}：2007/02/09~2008/02/15
T_6 ：2004/05/28~2005/06/03	T_{24}：2005/10/21~2006/10/20	T_{42}：2007/03/16~2008/03/14
T_7 ：2004/06/25~2005/07/01	T_{25}：2005/11/18~2006/11/17	T_{43}：2007/04/14~2008/04/11
T_8 ：2004/07/23~2005/07/29	T_{26}：2005/12/16~2006/12/15	T_{44}：2007/05/11~2008/05/09
T_9 ：2004/08/20~2005/08/26	T_{27}：2006/01/13~2007/01/12	T_{45}：2007/06/08~2008/06/06
T_{10}：2004/09/17~2005/09/23	T_{28}：2006/02/10~2007/02/09	T_{46}：2007/07/06~2008/07/04
T_{11}：2004/10/15~2005/10/21	T_{29}：2006/03/10~2007/03/16	T_{47}：2007/08/03~2008/08/01
T_{12}：2004/11/12~2005/11/18	T_{30}：2006/04/07~2007/04/14	T_{48}：2007/08/31~2008/08/29
T_{13}：2004/12/10~2005/12/16	T_{31}：2006/05/05~2007/05/11	T_{49}：2007/09/29~2008/09/26
T_{14}：2005/01/07~2006/01/13	T_{32}：2006/06/02~2007/06/08	T_{50}：2007/10/26~2008/10/24
T_{15}：2005/02/03~2006/02/10	T_{33}：2006/06/30~2007/07/06	T_{51}：2007/11/23~2008/11/21
T_{16}：2005/03/11~2006/03/10	T_{34}：2006/07/28~2007/08/03	T_{52}：2007/12/21~2008/12/19
T_{17}：2005/04/08~2006/04/07	T_{35}：2006/08/25~2007/08/31	
T_{18}：2005/05/06~2006/05/05	T_{36}：2006/09/22~2007/09/29	